Chapitre 1

Le dénombrement

1) Les ensembles finis

1.1) Généralités

Définition Soient $u_1, u_2, \ldots, u_p$ des objets mathématiques. On forme alors l'ensemble

$$E = \{u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_p\}$$

On dit que chaque u_i(pour $1 \leq i \leq p$) est un élément de l'ensemble E, ou autrement dit que u_i appartient à E et on écrit $u_i \in E$.

Exemple :
$A = \{0, 1, 2, \}$ est un ensemble fini. 1 est un élément de A, on écrit $1 \in A$, et $\{1\}$ est une partie de A, on écrit $\{1\} \subset A$.

Propriétés
Soient E, F et G trois ensembles. Alors :

1) $\emptyset \subset E$
2) $E \subset E$.
3) Transitivité : *si* $E \subset F$ *et* $F \subset G$, *alors* $E \subset G$.
4) Double inclusion : $E = F \Leftrightarrow E \subset F$ *et* $F \subset E$.

1.2) Le cardinal

Définition Le nombre d'éléments distincts d'un ensemble E est appelé <u>le cardinal de E</u>, on le note $Card(E)$.
Un ensemble est fini si son cardinal est un entier naturel, i.e. s'il possède un nombre fini d'éléments. Dans le cas contraire, on dit qu'il est infini.

Exemple :

— $A = \{0, 1, 2\}$ est un ensemble fini, contenant 3 éléments distincts, donc, $card(A) = 3$.

— L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est un ensemble de cardinal 0.

— L'ensemble $\{*,\ \theta,\ \lambda,\ l\}$ est de cardinal 4.

Proposition

Soit E un ensemble fini et soit A une partie de E. Alors A est également un ensemble fini et $Card(A) \leq Card(E)$. *Si de plus, on a $Card(A) = Card(E)$, alors nécessairement $A = E$.*

1.3) L'ensemble des parties

Définition

Pour tout ensemble E, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble formé par toutes les parties de E. Appelé l'ensemble des parties de E.

Théorème 1.6.

Si $card(A) = n$, alors $Card(\mathcal{P}(A)) = 2^n$.

Exemple :

Soit $A = \{0, 1, 2\}$. Alors, l'ensemble des parties de A est :

$$\mathcal{P}(A) = \Big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, A\Big\}.$$

On a $A \in \mathcal{P}(A)$.

De plus, on a $Card(A) = 3$ et $Card(\mathcal{P}(A)) = 2^3 = 8$.

1.4) L'intersection et l'union

Définition

Soient E et F deux ensembles.

• On appelle intersection de E et F, notée $E \cap F$, l'ensemble des éléments qui appartiennent simultanément à E et à F.

• On appelle union de E et F, notée $E \cup F$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à E ou à F, i.e. dans au moins un des deux ensembles.

Deux ensembles E et F vérifiant $E \cap F = \emptyset$ sont dits disjoints.

Proposition

Soient A et B deux ensembles finis. Alors :

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B).$$

De plus, si A et B sont disjoints, alors $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$.

Exemple :

Soit $A = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$. Alors :
$A \cap B = \{1, 3\}$ et $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
On a bien, $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B) = 5 + 3 - 2 = 6$.

Propriétés

La relation d'intersection est :

- *commutative* : $A \cap B = B \cap A$.
- *associative* : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
- $A \cap A = A$ *et* $A \cap \emptyset = \emptyset$.

La relation de l'union est :

- *commutative* : $A \cup B = B \cup A$.
- *associative* : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
- $A \cup A = A$ *et* $A \cup \emptyset = A$.

L'intersection et l'union vérifient :

- *la distributivité de* $\cap$ sur $\cup$: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
- *la distributivité de* $\cup$ sur $\cap$: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

1.5) Le complémentaire d'une partie

Définition

Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle complémentaire de A dans E, et on note $E \setminus A$, (ou ${}^{C}A$ ou $\overline{A}$) l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A :

$$E \setminus A = {}^{C}A = \overline{A} = \{x \in E,\ x \notin A\}$$

Exemple :

Soit $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ et $A = \{0, 1, 4, 5, 8, 10\}$. Alors, le complémentaire de A dans E est :

$$E \setminus A =^{C} A = \{2, 3, 6, 7, 9\}.$$

Propriétés

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E.

- ${}^{C}E = \emptyset$.
- ${}^{C}\emptyset = E$.

- ${}^{C}({}^{C}A) = A$.
- $({}^{C}A) \cap A = \emptyset$.
- $({}^{C}A) \cup A = E$.
- ${}^{C}(A \cup B) = ({}^{C}A) \cap ({}^{C}B)$.
- ${}^{C}(A \cap B) = ({}^{C}A) \cup ({}^{C}B)$.

1.6) Le produit Cartésien

Définition

On appelle produit cartésien de n ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$, l'ensemble des suites finies :

$$E_1 \times E_2 \times \ \cdots \ \times E_n = \{(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\ x_1 \in E_1,\ \ldots,\ x_n \in E_n\}$$

En particulier, lorsque les E_i sont tous identiques, on le note simplement E^n.

Proposition

Soient A et B deux ensembles finis. Alors :

$$Card(A \times B) = Card(A) \times Card(B).$$

Exemple :

Soient $A = \{1, 2\}$ et $B = \{0, 1, 3\}$, alors :

$$A \times B = \{(1,0), (1,1), (1,3), (2,0), (2,1), (2,3)\}.$$

On a bien $Card(A \times B) = Card(A) \times Card(B) = 2 \times 3 = 6$.

2) Le dénombrement

2.1.) Le dénombrement des p-listes

Définition 2.1.1.

On appelle p-liste ou p-uplet d'un ensemble E tout élément de E^p, i.e. un élément de la forme $(x_1,\ \ldots,\ x_p)$, avec $\forall 1, ..., p,\ x_i \in E$.

Théorème 2.1.2.

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors, le nombre de p-listes d'éléments de E est égal à n^p.

Remarque

On utilise les p-listes en cas de choix successifs (l'ordre est important) de p éléments d'un ensemble, avec éventuelles répétitions.

Exemple

Déterminer le nombre de codes à 4 chiffres pour une carte bancaire.

On sait que les codes des cartes bancaires se composent de chiffres $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Alors, $n = Card(E) = 10$. De plus, dans un code si on change l'ordre, le code change, par exemple $1574 \neq 5174$, donc l'ordre est important. D'autre part, dans un code on peut avoir des répétitions, par exemple 1125. Donc, les codes sont des 4-listes de E. Le nombre des codes possibles est $10^4 = 10000$.

2.2.) Le dénombrement des arrangements

Définition 2.2.1.

Soit E un ensemble et soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle p-arrangement de E ou arrangement de p éléments de E toute suite de p éléments distincts de E.

Théorème 2.2.2.

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors, le nombre de p-arrangement d'éléments de E est égal à $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Remarque

On utilise les p-arrangements en cas de choix successifs (l'ordre est important) de p éléments d'un ensemble, mais sans répétition.

Exemple :

Déterminer le nombre de tirages successifs, sans remise, de 3 boules dans une urne comportant 9 boules numérotées de 1 à 9.

Le nombre des boules est $n = 9$. Les tirages sont successifs donc il y a un ordre. De plus, le tirage est sans remise, donc il n'y a pas de répétition. Donc, les tirages sont des 3-arrangements des boules. Le nombre des tirages possibles est

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 9 \times 8 \times 7 = 504.$$

2.3.) Le dénombrement des permutations

Définition 2.3.1.

Soit E un ensemble à n éléments. Un n-arrangement de E est appelé une permutation de E. Une permutation est donc un n-uplet constitué par un changement d'ordre, des n éléments de E.

Théorème 2.3.2.

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors, le nombre de permutations d'éléments de E est égal à $n!$. C'est à dire, il y a $n!$ façon différente de ranger les n éléments de E.

Remarque

On utilise les permutations en cas de changement de l'ordre.

Exemple

De combien de manières peut-on disposer 6 livres (distincts) sur une étagère ?

Le nombre des livres est $n = 6$. On change seulement leur ordre, donc ce sont des permutations. Le nombre des dispositions possibles est $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

2.4.) Le dénombrement des combinaisons

Définition 2.4.1.

Soit E un ensemble et soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle une combinaison de E de p éléments, toute partie de E de cardinal p.

Théorème 2.4.2.

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors, le nombre de combinaisons de p éléments dans E est égal à $C_n^p = \dfrac{n!}{p! \times (n-p)!}$.

Remarque

On utilise les combinaisons en cas de choix simultané (pas d'ordre et pas de répétition).

Exemple

Un étudiant doit répondre à 7 des 10 questions d'un examen. De combien de manières peut-il répondre ?

Le nombre total des questions est $n = 10$. L'étudiant doit choisir 7 parmi les 10 peu importe leur ordre et il ne va pas répéter la réponse sur une question. Donc, ce sont des combinaisons. Le nombre des manières de réponses possibles est

$$C_{10}^7 = \frac{10!}{7! \times (10-7)!} = \frac{10!}{7! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120.$$