Chapitre 2
Introduction à la probabilité

1) L'univers et les événements

Définition 1.1.

Une expérience est dite aléatoire quand le résultat ne peut pas être prévu avec certitude.

Exemples :

Si on lance une pièce de monnaie, on ne peut pas prévoir avec certitude si on aura pile ou face. Donc c'est une expérience aléatoire.

Si on relâche un stylo de nos mains, on est sûr qu'il va tomber. Donc, ce n'est pas une expérience aléatoire.

Définitions 1.2.

- L'ensemble de toutes les possibilités s'appelle l'univers, noté Ω.
- Une partie $A \subset \Omega$ s'appelle un événement.
- Un événement ayant un seul élément $A = \{\omega\}$ (c'est à dire, de cardinal 1), s'appelle un événement élémentaire.

Exemple

Supposons que nous avons une famille de 4 personnes : Mohammed, Salma, Hassan et Khadija. On veut seulement 2 personnes pour nous accompagner dans notre voyage. Alors :

- L'univers est $\Omega = \Big\{\{$ Mohammed, Salma$\}$, $\{$ Mohammed, Hassan$\}$, $\{$ Mohammed, Khadija$\}$, $\{$ Salma, Hassan$\}$, $\{$Salma, Khadija$\}$, $\{$ Hassan, Khadija$\}\Big\}$.
- La partie $A = \Big\{\{$ Mohammed, Salma$\}$, $\{$ Mohammed, Hassan$\}$, $\{$ Mohammed, Khadija$\}\Big\}$ est un événement. On peut l'exprimer autrement par une phrase, A : les possibilités où Mohammed nous accompagne.
- $B = \Big\{\{$Salma, Khadija$\}\Big\}$ est une événement élémentaire car $Card(B) = 1$.

Propriétés 1.3.

- L'univers Ω est l'événement certain. En effet, il présente toutes les possibilités, donc on est certain que l'un de ses éléments sera réalisé.
- L'événement $\emptyset$ est l'événement impossible. En effet, il ne contient aucune possibilité, mais on est sûr qu'au moins une possibilité sera réalisée.
- Soient A et B deux événements. L'événement $A \cup B$ est réalisé si un élément de A se réalise **ou** un élément de B se réalise.
- Soient A et B deux événements. L'événement $A \cap B$ est réalisé si un élément de A se réalise **et** en même temps un élément de B se réalise.
- Soit A un événement. L'événement $\overline{A}$ est réalisé si aucun élément de A ne se réalise, c'est l'événement contraire de A.
- Si A et B sont disjoints (c'est à dire, $A \cap B = \emptyset$), alors on dit que les événements A et B sont **incompatibles**.

2) La probabilité d'un ensemble fini

La probabilité d'un événement est une valeur numérique qui représente la proportion de fois où l'événement va se réaliser, quand on répète l'expérience dans des conditions identiques. On peut déduire de cette définition qu'une probabilité doit être entre 0 et 1 et que la probabilité d'un événement est la somme des probabilités de chacun des événements élémentaires qui le constituent.

Définition 2.1.

Une probabilité sur un ensemble fini Ω est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$, telle que :

1. $0 \leq P(A) \leq 1$, pour tout $A \subseteq \Omega$,
2. $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$, pour tout $A \subseteq \Omega$,
3. $P(\Omega) = 1$.

Si on veut exprimer la probabilité en pourcentage, on multiplie par 100.

Exemple :

Considérons $\Omega = \{x, y, z\}$. On suppose que la probabilité que x se réalise est $p(\{x\}) = 0,5$, la probabilité que y se réalise est $p(\{y\}) = 0,4$, et la probabilité que z se réalise est $p(\{z\}) = 0,1$. Soit $A = \{x, z\}$. Alors, la probabilité de A est :

$$p(A) = p(\{x\}) + p(\{z\}) = 0,5 + 0,1 = 0,6.$$

En pourcentage, la réalisation de A est probable pour 60%.

Remarque :

La somme des probabilités de tous les événements élémentaires égale toujours à 1.

Proposition 2.2.

Soient A et B deux événements dans l'univers Ω. Alors :

- $p(\emptyset) = 0$.
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- Si A et B sont incompatibles, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Définition 2.3.

Une loi de probabilité c'est l'ensemble des probabilité de tous les événements.

Quand l'univers est fini, il suffit de présenter les probabilités des événements élémentaires.

Exemple :

Considérons l'univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$. Alors, le tableau suivant présente une loi de probabilité.

ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$p(\{\omega_i\})$	0,2	0,15	0,25	0,3	0,1

Si $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}$, alors $p(A) = p(\omega_1) + p(\omega_3) + p(\omega_4) = 0,2 + 0,25 + 0,3 = 0,75$.

3) La probabilité uniforme

Soit Ω un ensemble fini. Il arrive, comme quand on lance un dé équilibré, que les événements élémentaires ont tous la même probabilité. On parle alors d'événements élémentaires **équiprobables**.

Définition 3.1.

Une probabilité p dans un ensemble fini Ω est dite *uniforme*, si tous les événements élémentaires sont équiprobables. C'est à dire, si $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, alors $p(\omega_1) = p(\omega_2)$.

Proposition 3.2.

Soient Ω un univers fini, A est un événement dans Ω et p une probabilité uniforme sur Ω. Alors :

$$p(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}.$$

Exemple

On lance un dé régulier qui a 6 faces portants des nombres de 1 à 6. L'univers, c'est l'ensemble de toutes les possibilités : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Alors, $Card(\Omega) = 6$.

On veut calculer la probabilité d'avoir 1 ou 3, c'est à dire, la probabilité d'avoir $A = \{1, 3\}$. On a $Card(A) = 2$. Donc,

$$p(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0,33.$$

Remarque :

Si ω est un événement élémentaire, alors $p(\{\omega\}) = \dfrac{1}{Card(\Omega)}$. On pose $Card(\Omega) = n$. Donc, La loi de probabilité dans le cas uniforme se présente comme suit :

ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	$\dots$	ω_n
$p(\{\omega_i\})$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\dots$	$\frac{1}{n}$

4) La probabilité conditionnelle

Parfois on veut calculer la probabilité d'un événement A, mais on sait déjà qu'un événement B est réalisé. La réalisation de l'événement B peut affecter la probabilité de A. Par exemple, on considère l'événement $A =$ "Ahmed rencontrera Salah". La probabilité $p(A)$ que Ahmed rencontrera Salah en général est très faible. Mais, si on a une information supplémentaire disant que Ahmed et Salah partiront le même jour au même restaurant, la probabilité de leur rencontre devient plus importante. On parle alors d'une probabilité **conditionnelle**, on dit que c'est la probabilité que Ahmed rencontrera Salah sachant que Ahmed et Salah partiront le même jour au même restaurant. Formellement, on pose l'événement $B =$ "Ahmed et Salah partiront le même jour au même restaurant". Alors, on écrit $p(A \mid B)$ (ou bien $p_B(A)$) qui se lit, la probabilité de A sachant B (ou à condition B).

Définition 4.1.

Soient A et B deux événements dans Ω, avec $p(B) \neq 0$. La probabilité de A sachant B est

$$p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

Remarque :

On remarque aussi que $p(A \cap B) = p(A \mid B) \times p(B)$.

Cette écriture explique mieux la formule donnée. En effet, la réalisation de A et B (c'est à dire, $A \cap B$) est équivalente à la réalisation de B puis la réalisation de A sachant que B est déjà réalisé (c'est à dire, $A \mid B$).

Proposition 4.2. (*Formule de probabilités totales*)

Soit A un événement dans Ω tel que $p(A) \neq 0$ (n'est pas impossible) et $p(A) \neq 1$ (n'est pas certain). Alors, pour tout événement B, on a

$$p(B) = p(B \mid A) \times p(A) + p(B \mid \overline{A}) \times p(\overline{A}).$$

Proposition 4.3. (*Formule de Bayes*)

Soit A un événement dans Ω tel que $p(A) \neq 0$ (n'est pas impossible) et $p(A) \neq 1$ (n'est pas certain). Alors, pour tout événement B avec $p(B) \neq 0$, on a

$$p(A \mid B) = \frac{p(B \mid A) \times p(A)}{p(B \mid A) \times p(A) + p(B \mid \overline{A}) \times p(\overline{A})}.$$

Définition 4.4

Si la réalisation de l'événement A n'a aucun impact sur la réalisation de l'événement B et vice versa, alors on dit que A et B sont **indépendants**. Dans ce cas, on a $p(B \mid A) = p(B)$ et $p(A \mid B) = p(A)$.

Proposition 4.5.

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.