Chapitre 3
Les variables aléatoires

1) Les variables aléatoires discrètes

Soit Ω l'univers de toutes les possibilités. Une variable aléatoire réelle est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Lorsque $X(\Omega)$ est dénombrable, on dit alors que X est une variable aléatoire réelle discrète (abrév. par V.A.D).
La variable aléatoire c'est tout simplement la chose qu'on veut mesurer.

1.1) La loi de probabilité et sa fonction de répartition

Si X est une V.A.D et $D = X(\Omega)$ (appelé l'univers image), une probabilité image P_X est définie par : $P_X(\{x_i\}) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\} = P(X = x_i)$ noté aussi p_i.
En général, on trouve aussi :

$$\begin{cases} P_X(]a, b]) = P(a < X \leq b) \\ P_X(]-\infty, a]) = P(X \leq a) \end{cases}$$

Ce P_X est appelé **la loi de probabilité de** X, c'est la fonction qui mesure la probabilité d'obtenir des certaines valeurs pour X.
L'expression $P_X(]-\infty, a]) = P(X \leq a)$ définit **La fonction de répartition** notée $F_X(a)$.

1.2) L'espérance mathématique et la variance

Définition 1.2.1 :

L'espérance mathématique de X **:** est la valeur que l'on s'attend à trouver, en moyenne, si l'on répète un grand nombre de fois la même expérience aléatoire. Elle est notée $E(X)$ et se calcule par la formule : $E(X) = \sum_{i \in I} x_i p_i$.
Remarquez que $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Proposition 1.2.2 :

Si X et Y sont deux V.A.D, on peut montrer aussi que $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ et lorsque X et Y sont indépendantes on aura aussi $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Définition 1.2.3 :

La variance de X **:** est une mesure servant à caractériser la dispersion des résultats obtenus dans l'expérience. Elle est notée $V(X)$ et se calcule par la formule $V(X) = \sum\limits_{i\in I} x_i^2 p_i - (E(X))^2 = \sum\limits_{i\in I} p_i(x_i - E(X))^2$.
Remarquez aussi que $V(aX+b) = a^2V(X)$.

L'écart-type de X **:** joue le même rôle que la variance, il est en fait sa racine carré : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarque :

Remarquez que $\sigma(aX+b) = \mid a \mid \sigma(X)$.

2) Les lois de probabilité discrètes les plus connues

2.1) Les lois de Bernoulli (Lois binomiales) $\mathcal{B}(n,p)$

On fait la même expérience n fois, à chaque fois on a que deux résultats possibles : Le succès avec une probabilité de p et l'échec avec une probabilité de $1-p$.

La variable aléatoire X dans ce cas calcule le nombre de succès marquées parmi les n expériences faites. Autrement dit, l'expression $X = k$ désigne que parmi les n expériences on avait exactement k succès et donc $n-k$ échecs.

Notons que l'univers image $D = X(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$ (Toutes les valeurs possibles pour X), donc pour $k \in D$ on définit la loi de Bernoulli par suit : $P(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$.

Dans ce cas, on a aussi : $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

2.2) La loi binomiale négative $NegBin(n,p)$

On fait la même expérience que celle de la loi de Bernoulli ci-dessus, mais cette fois-ci, c'est pas juste n fois, mais on va poursuivre les expériences jusqu'à obtenir n succès.

La variable aléatoire X compte combien d'échecs on avait rencontré avant atteindre les n succès désirés. Donc $X = k$ montre qu'on a obtenu k échecs afin de compléter les n succès, c'est à dire qu'on a répété l'expérience $n+k$ fois.

Dans ce cas, $D = X(\Omega) = \mathbb{N}$, car on ne peut pas deviner à quel point on va arrêter (on va atteindre les n succès).

$P(X = k) = C_{n+k-1}^k p^n (1-p)^k$.
$E(X) = \dfrac{n(1-p)}{p}$ et $V(X) = \dfrac{n(1-p)}{p^2}$.

2.3) La loi géométrique de paramètre p

Toujours avec la même expérience, maintenant on va répéter jusqu'à obtenir le premier succès. On considère la variable aléatoire X qui compte le nombre d'échecs obtenu avant rencontrer le premier succès. Alors $X = k$ désigne qu'on a obtenu $(k-1)$ échecs et puis un succès enfin.

$D = X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$.

$E(X) = \dfrac{1}{p}$ et $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

2.4) La loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, \frac{n_1}{N})$

Imaginez qu'on a une urne qui contient n_1 boules rouges et n_2 boules bleues. Soit $N = n_1 + n_2$. L'expérience consiste à tirer simultanément et sans remise n boules de l'urne (n est évidemment $\leqslant N$).

La variable aléatoire X compte le nombre de boules rouges tirées parmi les n boules totales. L'expression $X = k$ désigne qu'on a tiré k boules rouges et $n-k$ boules bleues.

Donc, on peut immédiatement constater que k doit être inférieur à n_1 et $n-k$ inférieure à n_2.

Là pour calculer l'univers image $D = X(\Omega)$, il faut voir quelques détails :

$$D = X(\Omega) = \begin{cases} \{n-n_2, n-n_2+1, ..., n_1\} & \text{si } n \geq n_1 \text{ et } n \geq n_2 \\ \{n-n_2, n-n_2+1, ..., n\} & \text{si } n < n_1 \text{ et } n \geq n_2 \\ \{0, 1, ..., n_1\} & \text{si } n \geq n_1 \text{ et } n < n_2 \\ \{0, 1, ..., n\} & \text{si } n < n_1 \text{ et } n < n_2 \end{cases}$$

On aura donc : $P(X = k) = \dfrac{C_{n_1}^k \times C_{n_2}^{n-k}}{C_N^n}$.

$E(X) = \dfrac{n_1}{N} \times n$ et $V(X) = n \times \dfrac{n_1 n_2}{N^2} \times \dfrac{N-n}{N-1}$.

2.5) La loi de Poisson de paramètre λ : $\mathcal{P}(\lambda)$

Imaginez maintenant un événement qui se réalise un certain nombres de fois durant une durée du temps fixé, en plus on connaît la moyenne de sa réalisation (l'espérance ou encore l'estimation) qui est notée λ.

La variable aléatoire X compte le nombre des réalisation de cet événement dans la même durée. On dit alors qu'elle suit la loi de Poisson de paramètre λ.

Dans ce cas $D = X(\Omega) = \mathbb{N}$.

$P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

$E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.

3) Les variables aléatoires continues

Si l'ensemble des événements possibles constituent un intervalle ou une réunion des intervalles (par exemple : la largeur d'une plaque), la probabilité d'obtenir une valeur précise sera en général 0 (par exemple : la probabilité que la longueur d'une plaque choisie par hasard soit $\sqrt{3}$ mètres). Dans ce cas la variable aléatoire sera appelée continue (abr. V.A.C). De plus, on ne pourra pas définir la loi de probabilité pour chaque point (comme le cas discret) mais on la définira pour des intervalles.

3.1) les lois de probabilité continues

Si on se demande dans le cas de la longueur des plaques d'aluminium, quelle est la probabilité que notre plaque soit de longueur comprise entre 20 km et 30 km ?

On pourra dire que c'est impossible, car on sait déjà qu'une telle longueur géante n'existe pas réellement. Alors que si on se demande la même question mais pour une longueur comprise entre 2 mètres et 3 mètres ... là on devra faire plus d'analyse.

Donc, pour calculer la probabilité d'obtenir un événement continu, on a besoin de quelque chose qui précise la distribution des événements, c'est **la fonction de densité de probabilité associée à la V.A.C** X. C'est une fonction **continue** sur $\mathbb{R}$ (sauf peut être un nombre dénombrable de points) et **positive**, telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.

On définit alors **la loi de probabilité** de la manière suivante :
$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)dt$
$P(a \leqslant X) = \int_a^{+\infty} f(t)dt$
$P(X \leqslant b) = \int_{-\infty}^b f(t)dt$
Ainsi, **La fonction de répartition** se découle naturellement avec l'expression suivante :
$F_X(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt.$

3.2) La version continue des paramètres du probabilité

Souvenez vous toujours que **la somme dans le cas continu devient une intégrale.** Donc on va tout garder en remplaçant les $\sum$ par des $\int$.

1. **L'espérance mathématique $E(X)$:**
   $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t.f(t)dt$
2. **La variance**

$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2.f(t)dt - (E(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}(t - E(X))^2.f(t)dt.$

4) Les lois de probabilité continues les plus connues

4.1) La loi uniforme sur un intervalle $[a,b]$: $U_{[a,b]}$

Lorsqu'on connaît déjà que toutes les valeurs possibles de la V.A.C X sont dans un intervalle $[a,b]$ et qu'ils sont uniformément distribuées (c'est à dire, rien ne dit qu'il y a plus de chance d'avoir une valeur dans une partie de l'intervalle qu'une autre partie de même longueur). On dit alors, que la loi est uniforme.

Naturellement, plus que la longueur d'une partie est grande, plus qu'il aura plus de chance pour contenir les valeurs de X.

- La fonction de densité dans ce cas est : $f(x) = \dfrac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$, avec :

$$I_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- La fonction de répartition est :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } b \leq x \end{cases}$$

- $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

4.2) La loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$: $Exp(\lambda)$

On veut mesurer la probabilité qu'une certaine phénomène durera plus que x heures à partir de l'instant t_0, sachant que son comportement au passé n'aura aucun impact sur ce que viendra (ceci se traduit mathématiquement par : $P(X > x+t_0/X > t_0) = P(X > x)$).

Supposons qu'on connaît l'espérance $E(X)$ de cette V.A.C X, alors on dit qu'elle suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{E(X)}$.

- La fonction de densité : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{[0,+\infty[}(x)$.

- La fonction de répartition : $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

- $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

4.3) La loi normale (loi de Gauss) centrée et réduite : $\mathcal{N}(0,1)$

Si l'étude d'un certain phénomène nous a donné des résultats (leurs moyenne est 0 et la variance est 1) et on voulait savoir si ce phénomène est normal (naturel ou encore aléatoire) ou bien qu'il est dirigé, il suffit de tester si les résultats suivent la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Remarque pour culture : on peut définir la loi normale pour une espérance μ et variance σ^2, noté $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Mais le plus important c'est $\mathcal{N}(0,1)$, car il y a des techniques statistiques pour centrer (l'espérance devient 0) et réduire (la variance devient 1) n'importe quels résultats.

- La fonction de densité : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{x^2}{2}}$

- La fonction de répartition : $F_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-t^2}dt.$

On ne connaît pas jusqu'à maintenant une formule générale qui calcule l'intégrale $\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-t^2}dt$ (appelée l'intégrale de Gauss). Mais on sait quelques résultats partiels comme :

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$; $\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$; $F_X(x) = 1 - F_X(-x)$.

D'autres résultats calculés sont exposés sur un tableau appelé la table de la loi normale à télécharger sur le lien :

https ://archimede.mat.ulaval.ca/stt1920/STT-1920-Loi-normale.pdf

- $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$.

Remarque :

Dans la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ si $n \geq 30$, $np \geq 5$ ou $n(1-p) \geq 5$, On pourra travailler avec la loi normale $\mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$.

Remarque : Il y a d'autres lois continues aussi bien connues comme la loi de chi 2, la loi de Student et la loi de Fisher ... qui s'utilisent plus chez les statisticiens.