# 5. Paramètre de tendance centrale

Les principaux indicateurs statistiques de tendance centrale, également appelés indicateurs de position, sont **le mode, la médiane et la moyenne.**

## 5.1). Le mode

**Le mode** d'une série statistique est la modalité qui correspond à l'effectif le plus élevé.

**La classe modale** d'une série statistique groupée est la classe associée au rectangle de plus grande hauteur dans l'histogramme de cette série, c'est-à-dire la classe dont le rapport (effectif / amplitude) est le plus grand.

### a) Cas d'un caractère qualitatif

**Exemple** : Tableau de répartition de la variable 'Mention au Bac' pour un groupe de 15 étudiants.

| Mention au Bac | Effectifs | Fréquences | Pourcentages |
|---|---|---|---|
| P | $n_P = 8$ | $f_P = 8/15 = 0.533$ | 53.3% |
| AB | $n_{AB} = 4$ | $f_{AB} = 4/15 = 0.267$ | 26.7% |
| B | $n_B = 2$ | $f_B = 2/15 = 0.133$ | 13.3% |
| TB | $n_{TB} = 1$ | $f_{TB} = 1/15 = 0.067$ | 6.7% |
| | effectif total $N = 15$ | $f_P + f_{AB} + f_B + f_{TB} = 1$ | Total = 100% |

**Mode = P**

# 5. Paramètre de tendance centrale

## 5.1). Le mode

### b) Cas d'un caractère quantitatif discret

**Exemple** : Une enquête menée dans un village concerne le nombre d'enfants à charge pour 229 familles.

| $M_i$ | $n_i$ | $f_i$ (en %) | $F_i$ (en %) |
|---|---|---|---|
| 0 | 48 | 20.96 | 20.96 |
| 1 | 65 | 28.38 | 49.34 |
| 2 | 44 | 19.21 | 68.56 |
| 3 | 27 | 11.79 | 80.35 |
| 4 | 19 | 8.30 | 88.65 |
| 5 | 15 | 6.55 | 95.20 |
| 6 | 8 | 3.49 | 98.69 |
| 7 | 2 | 0.87 | 99.56 |
| 8 | 1 | 0.44 | 100 |
| Total | 229 | 100 | |

**Mode : $M_o = 1$**

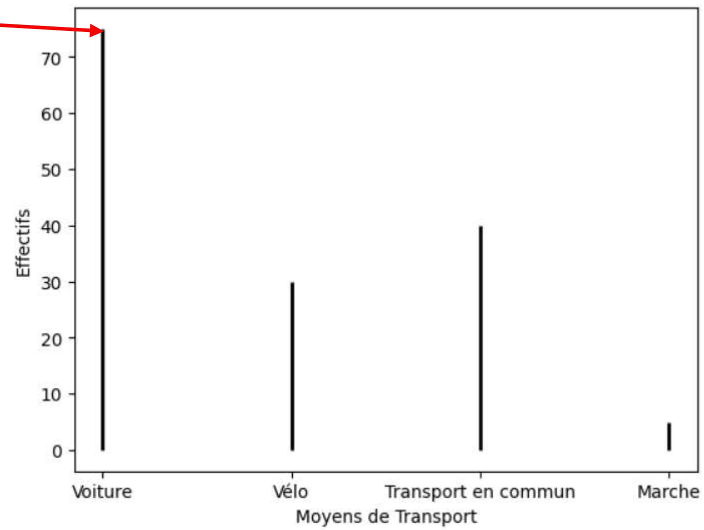
# 5. Paramètre de tendance centrale

## 5.1). Le mode

### c) Détermination du mode graphiquement

**Exemple** : En reprenant l'exemple précédent relatif aux moyens de transport: voiture, le vélo, le transport en commun et la marche, il convient de déterminer graphiquement le mode.

Mode = « Voiture »



# 5. Paramètre de tendance centrale

## 5.1). Le mode

### d) Cas d’un caractère quantitatif continue

Déterminer **la classe modale** $[\boldsymbol{e_{i-1}}, \boldsymbol{e_i}[$ à partir de l'histogramme, c'est-à-dire la classe correspondant au plus grand fréquence (*fréquence corrigée*). À l'intérieur de cette classe, déterminer une valeur approchée du mode.

- **Calcul du mode : effectifs regroupés par classes ayant des amplitudes égales**

$$Mo = \underbrace{X_i^{inf} + a \times \frac{d_1}{d_1 + d_2}}_{\text{Effectifs}} = \underbrace{e_{i-1} + a_i \times \frac{f_i - f_{i-1}}{2f_i - (f_{i-1} + f_{i+1})}}_{\text{Fréquence}}$$

$X_i^{inf}$ : Borne inférieure de la classe modale.

$a$ : Amplitude de la classe.

$d_1 = n_i - n_{i-1}$ et $d_2 = n_i - n_{i+1}$

# 5. Paramètre de tendance centrale

## 5.1). Le mode

### d) Cas d'un caractère quantitatif continue

Valeurs regroupées par classes **de même amplitude** :

| $X_i$ | $n_i$ | $f_i$ |
|---|---|---|
| [0-5[ | 2 | 0,066 |
| [5-10[ | 7 | 0,233 |
| [10-15[ | 18 | 0,6 |
| [15-20[ | 3 | 0,1 |
| Total | 30 | 1 |

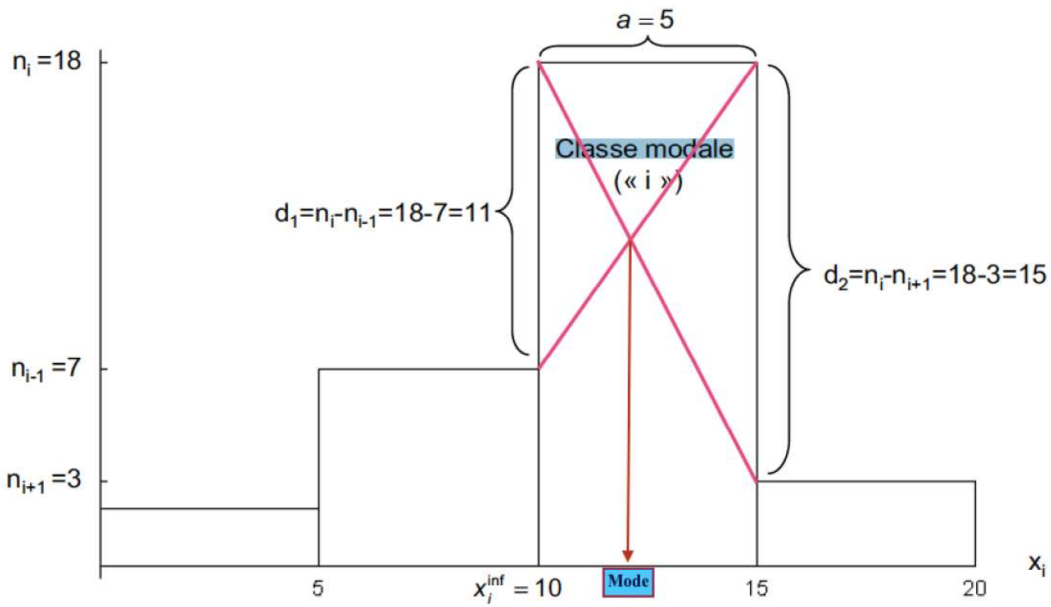
**Classe modale [10-15[**

Calculer le mode correspond a classe modale.

# 5. Paramètre de tendance centrale

## 5.1). Le mode

### d) Cas d'un caractère quantitatif continue




$$\text{Mode} = x_i^{\inf} + a\frac{d_1}{d_1 + d_2} = 10 + 5 \times \left(\frac{11}{11+15}\right) = 12{,}115$$

# 5. Paramètre de tendance centrale

## 5.1). Le mode

### d) Cas d'un caractère quantitatif continue

Valeurs regroupées par classes **d'amplitudes inégales**:

**Exemple**

| $X_i$ Modalités | $n_i$ Effectifs | $a_i$ Amplitudes | $h_i = \frac{n_i}{a_i}$ Effectifs corrigés |
|---|---|---|---|
| [0-10[ | 9 | 10 | 0,9 |
| [10-12[ | 9 | 2 | 4,5 |
| [12-20[ | 12 | 8 | 1,5 |

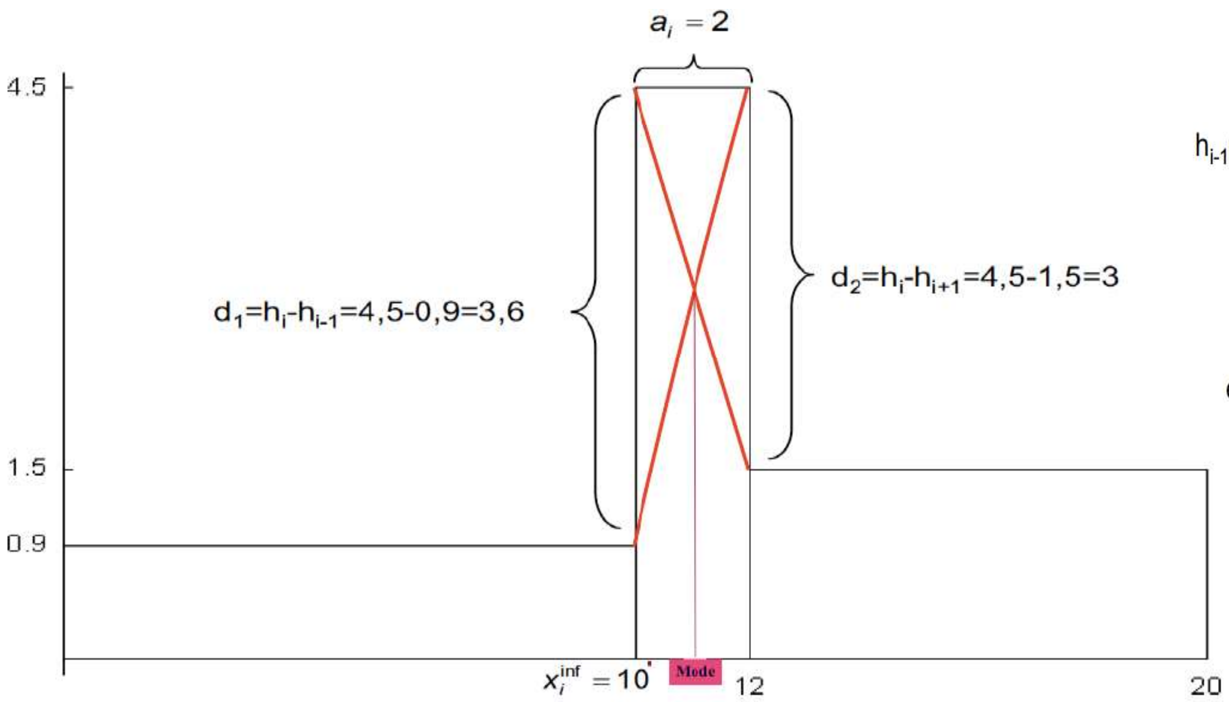
Classe modale [10-12[

# 01 Statistique descriptive a une dimension

## 5. Paramètre de tendance centrale

### 5.1). Le mode

**d) Cas d'un caractère quantitatif continue**




$h_{i-1}=n_{i-1}/a_{i-1}=9/10= 0{,}9$ $\quad h_i=n_i/a_i=9/2=4{,}5$ $\quad h_{i+1}=n_{i+1}/a_{i+1}=12/8=1{,}5$

$d_1=h_i-h_{i-1} = 4{,}5-0{,}9=3{,}6$ $\quad d_2=h_i-h_{i+1} =4{,}5-1{,}5=3$

et $\quad \text{Mode} = x_i^{\text{inf}} + a_i \dfrac{d_1}{d_1+d_2} = 10 + 2 \times \left(\dfrac{3{,}6}{3{,}6+3}\right) = 11{,}09$

# 5. Paramètre de tendance centrale

## 5.1). Le mode

**Remarques** :

- Une série statistique peut ne pas avoir de mode.
- Elle peut avoir un seul mode (unimodale).
- Elle peut aussi avoir plusieurs modes (multimodale).

- Dans le cas d'une série continue, le mode dépend du regroupement en classes choisi.

# 5. Paramètre de tendance centrale

## 5.2). La médiane

**La médiane** est la valeur de la variable qui divise la série en deux sous-ensembles de même effectif. Il s'agit de la valeur $Me$ de la variable pour laquelle la fréquence cumulée atteint $(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Me}) = \mathbf{0,5})$.

### a) Calcul de la médiane : Cas d'une variable quantitative discrète

Si pour tout $i, F_i \neq 0{,}5$, la médiane correspond à la modalité $x_i$ associée à la plus petite fréquence cumulée dépassant 0,5.

**Exemple :**

| $x_i$ | $n_i$ | $ECC_i$ | $f_i$ | $F_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 2 | 0,18 | 0,18 |
| 1 | 3 | 5 | 0,27 | 0,45 |
| 2 | 4 | 9 | 0,36 | 0,81 |
| 3 | 2 | 11 | 0,18 | 1 |
| Total | N=11 | Au plus | ≈ 1 | Au plus |

Me = 2

$\forall i, F_i(M_e) \neq 0,5$
La plus petite valeur dépassant 0,5

# 5. Paramètre de tendance centrale

## 5.2). La médiane

### b) Calcul de la médiane : Cas d'une variable quantitative continue

Pour déterminer la médiane dans ce cas, il est nécessaire de d'abord identifier la classe médiane $[e_{i-1};\ e_i[$ telle que : $F_{i-1} < 0{,}5 \leq F_i$, puis d'appliquer la formule suivante :

$$M_e = e_{i-1} + \frac{a_i}{f_i} \times [0{,}5 - F_{i-1}]$$

$e_{i-1}$ : Borne inférieure de la classe médiane. Et $a_i$ : Amplitude de la classe médiane.

**Exemple**: Le tableau suivant présente la répartition du personnel d'une entreprise en fonction de leur salaire mensuel en DH :

**Classe Médiane**

| Salaire mensuel en dhs | Effectifs $n_i$ | $ECC_i$ | Fréquences $f_i$ | $F_i$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| [1500 – 2000[ | 26 | 26 | 0,43 | 0,43 | 500 |
| [2000 – 2500[ | 12 | 38 | 0,2 | 0,63 | 500 |
| [2500 – 3000[ | 11 | 49 | 0,18 | 0,81 | 500 |
| [3000 – 3500[ | 6 | 55 | 0,1 | 0,91 | 500 |
| [3500 et plus[ | 5 | 60 | 0,08 | 1 | 500 |
| Total | 60 | -- | 1 | -- | -- |

$$Me = 2000 + \frac{500}{0{,}2} \times (0{,}5 - 0{,}43) = 2175$$

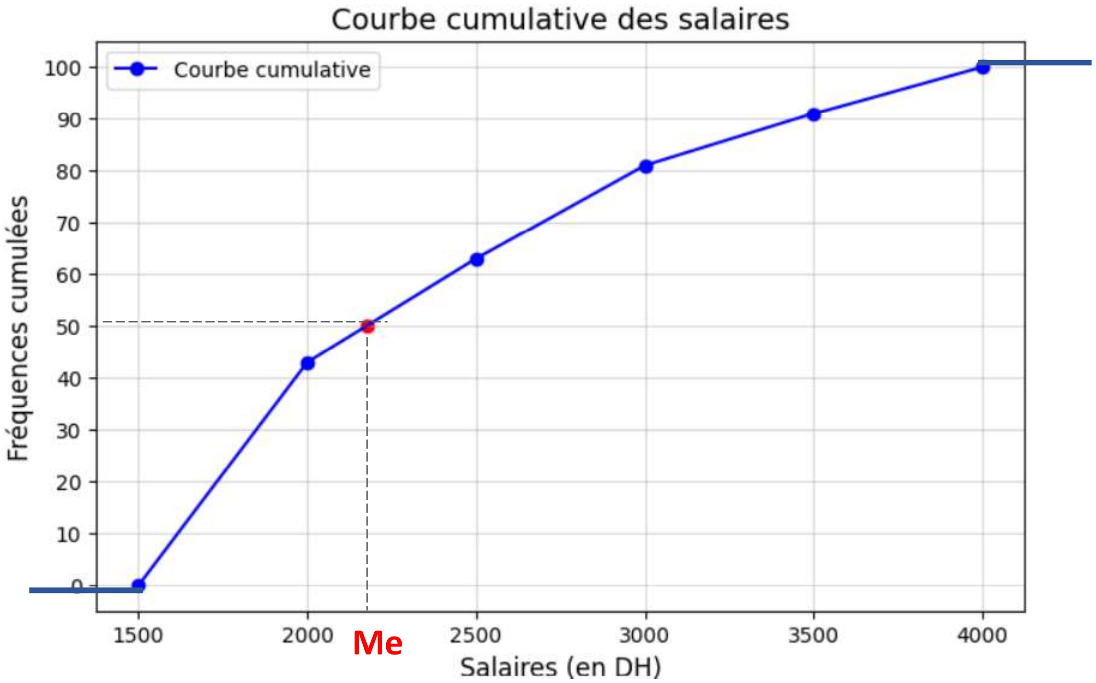
50 % environ des personnes ont un salaire inférieur ou égale à 2175 Dhs

# 5. Paramètre de tendance centrale

## 5.2). La médiane

### b) Calcul de la médiane : Cas d'une variable quantitative continue

**Détermination graphique de la médiane à partir de la courbe cumulative des effectifs**



01 **Statistique descriptive a une dimension**

# 5. Paramètre de tendance centrale

## 5.3). La moyenne

### a) Moyenne arithmétique pondérée

La moyenne arithmétique de X est la valeur définie comme suit :

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i . x_i = \sum_{i=1}^{k} f_i . x_i$$

**Exemple :** Soit le tableau suivant relatif au nombre de voitures détenues par les familles d'un quartier :

| Nombre de voitures | Nombre de familles | $n_i . x_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 15 | 15 |
| 2 | 6 | 12 |
| 3 | 7 | 21 |
| 4 | 2 | 8 |
| 5 | 2 | 10 |
| Total | 32 | 66 |

$$\overline{x} = \frac{66}{32} = 2,0625$$

01 Statistique descriptive a une dimension

# 5. Paramètre de tendance centrale

## 5.3). La moyenne

### b) Moyenne arithmétique pour des données groupées en classes

Dans ce cas la moyenne arithmétique se définit par l'expression:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i . c_i = \sum_{i=1}^{k} f_i . c_i$$

**Exemple :**

| Classes | $n_i$ | $c_i$ | $n_i \cdot c_i$ |
|---|---|---|---|
| [5-13[ | 6 | 9 | 54 |
| [13-28[ | 3 | 20,5 | 61,5 |
| [28-54[ | 5 | 41 | 205 |

$$\sum_{i=1}^{3} n_i \cdot c_i = 320{,}5$$

$$\bar{x} = \frac{(6 \times 9) + (3 \times 20{,}5) + (5 \times 41)}{14} = \frac{54 + 61{,}5 + 205}{14} = \frac{320{,}5}{14} \cong 22{,}89$$

# 5. Paramètre de tendance centrale

## 5.3). La moyenne

**Remarques :**

- La moyenne quadratique pondérée est définie par :

$$Q = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}$$

- Contrairement au mode, la moyenne existe toujours et est unique.
- La somme de toutes les observations d'une série statistique de taille $N$ est égale à $N$ fois leur moyenne arithmétique.
- Si une population $P$ de taille $N$ est composée de $m$ sous-populations $P_1, P_2, \dots, P_m$, de tailles respectives $n_1, n_2, n_3, \dots, n_m$ et de moyennes respectives $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_m}$.

  Alors la moyenne $\overline{x}$ de $P$ est donnée par :

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i \bar{x}_i$$

**Exemple :**

Dans une salle, 9 personnes ont une moyenne d'âge de 25 ans. Dans une autre salle, 11 personnes ont une moyenne d'âge de 45 ans. Après avoir regroupé les deux groupes, calculez la moyenne d'âge du groupe total.