



SUP'MANAGEMENT - Grande Ecole Intercontinentale
Reconnue par l'Etat

Mathématique : Analyse
1^{ère} Année Informatique

Houssam Hamdouch

Table des matières

1	Les suites numériques	3
2	Fonction d'une variable réelle	6
2.1	Rappels et définition	6
2.2	Fonctions classiques	6
2.2.1	Fonction logarithme népérien	6
2.2.2	Fonction exponentielle	7
2.2.3	Fonctions hyperboliques	7
2.2.4	Fonction <i>arcsin</i>	8
2.2.5	Fonction <i>arccos</i>	9
2.2.6	La fonction <i>arctan</i>	9
2.3	Limite d'une fonction	10
2.4	Fonctions continues	12

Chapitre 2

Fonction d'une variable réelle

2.1 Rappels et définition

- a) Soit E un ensemble quelconque on appelle fonction numérique définie sur E toute application de E dans $\mathbb{R}$.
Si $E \subset \mathbb{R}$, on dit que f est une fonction numérique de la variable réelle.
- b) Soient f et $g : E \rightarrow \mathbb{R}, \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a :
- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
 - $(fg)(x) = f(x)g(x)$
 - $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$
- c) f est périodique de période $T > 0$, si $\forall x \in E, (x + T) \in E$ et $f(x + T) = f(x)$
- d) f est paire sur E si : $\forall x \in E, (-x) \in E$ et $f(-x) = f(x)$
- e) f est impaire sur E , si $\forall x \in E, (-x) \in E$ et $f(-x) = -f(x)$
- f) f est majorée sur E si $\exists M \in \mathbb{R}$, tel que $\forall x \in E : f(x) \leq M$
- g) f est minorée sur E si $\exists m \in \mathbb{R}$, tel que $\forall x \in E : f(x) \geq m$
- h) f est bornée sur E , si f est majorée et minorée.
- i) f est croissante sur E si , $\forall x, y \in E (x \leq y \implies f(x) \leq f(y))$
- j) f est décroissante sur E si , $\forall x, y \in E (x \leq y \implies f(x) \geq f(y))$
- k) f est monotone sur E si, f est croissante ou bien décroissante.

2.2 Fonctions classiques

Cette section propose une révision de fonctions classiques déjà étudiées au lycée afin de préparer les sections suivantes.

2.2.1 Fonction logarithme népérien

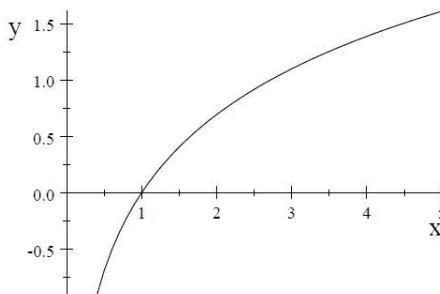
Définition 2.1. (*Fonction logarithme népérien*)

La fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Propriétés :

- 1) $\forall x \in]0, +\infty[, (\ln(x))' = \frac{1}{x}$
- 2) $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$,
- 3) $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$,
- 4) $\ln(1) = 0$, et $\forall x \in]0, 1[, \ln(x) < 0$ et $\forall x \in]1, +\infty[, \ln(x) > 0$,
- 5) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x), \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y), \forall x \in]0, +\infty[.$

- 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$
- 7) $x \mapsto \ln(x)$ n'admet ni maximum ni minimum.

FIGURE 2.1 – Courbe de $x \mapsto \ln(x)$.

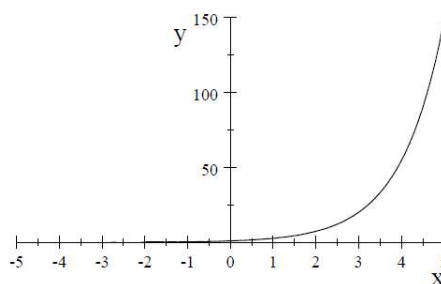
2.2.2 Fonction exponentielle

Définition 2.2. (*Fonction exponentielle*)

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est continue strictement croissante sur $]0, +\infty[$, elle admet une fonction réciproque notée : $x \mapsto e^x$ définie de $\mathbb{R}$ vers $]0, +\infty[$.

Propriétés :

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $(e^x)' = e^x$,
- 2) $x \in \mathbb{R}$, $\ln(x) = 1 \iff x = e$ (i.e. $\ln(e) = 1$) où e est un réel irrationnel $e \approx 2.718281\dots$
- 3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$,
- 4) $e^{x+y} = e^x \times e^y$, $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$, et $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$,
- 5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- 6) $x \mapsto e^x$ n'admet ni maximum ni minimum.

FIGURE 2.2 – Courbe de $x \mapsto e^x$.

2.2.3 Fonctions hyperboliques

Définition 2.3. (*Fonction sinus et cosinus hyperboliques*)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Propriétés :

- 1) $\sinh$ est impaire, $\cosh$ est paire,
- 2) $\sinh'(x) = \cosh x$, $\cosh'(x) = \sinh x$,
- 3) $\sinh'(0) = 1$, et $\cosh'(0) = 0$,
- 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = +\infty$,
- 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sinh x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left[\frac{e^x}{x} - \frac{1}{xe^x} \right] = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cosh x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left[\frac{e^x}{x} + \frac{1}{xe^x} \right] = +\infty$

On déduit que les courbes de $\sinh$ et $\cosh$ ont des branches paraboliques de direction l'axe (oy) au voisinage de $+\infty$

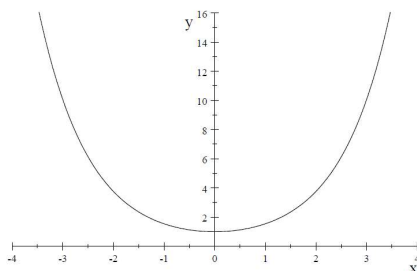


FIGURE 2.3 – Courbe de $\cosh(x)$.

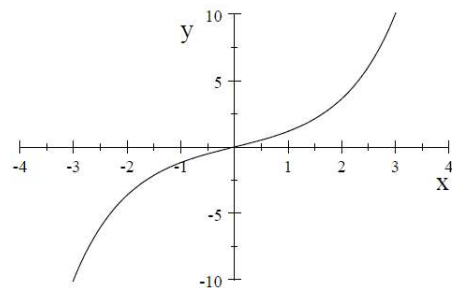


FIGURE 2.4 – Courbe de $\sinh(x)$.

Proposition 2.1.

- 1) $\cosh x + \sinh x = e^x$ et $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$,
- 2) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$,
- 3) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$ et $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$,
- 4) $\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$ et $\cosh(2x) = 2\cosh^2 x - 1 = 2\sinh^2 x + 1$,

Définition 2.4. (Tangente hyperbolique)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

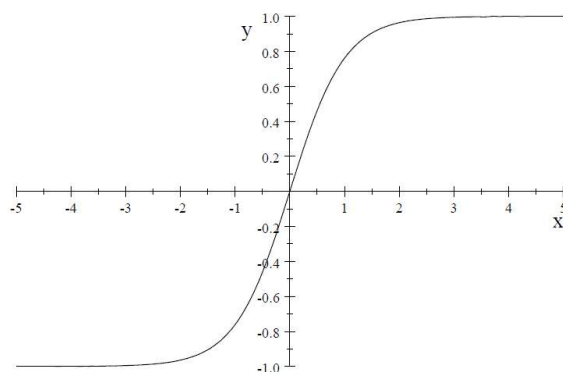
Propriétés :

- 1) $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$,
- 2) La fonction $\tanh$ est impaire,
- 3) $\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$ et $\tanh'(0) = 1$,
- 4) La fonction $\tanh$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
- 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$

2.2.4 Fonction $\arcsin$

La fonction $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ est continue strictement croissante, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

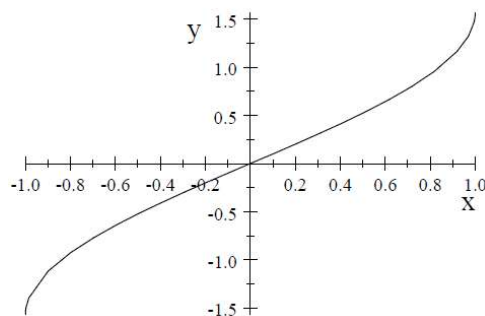
Donc, elle admet une fonction réciproque notée : $\arcsin : \begin{matrix} [-1, 1] & \rightarrow \\ x & \mapsto \arcsin x \end{matrix}$

FIGURE 2.5 – Courbe de $x \mapsto \tanh x$.

$$\begin{cases} y = \arcsin x, \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sin y, \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

La fonction $\arcsin$ est continue impaire et strictement croissante sur $[-1, 1]$ et

$$\forall x \in]-1, 1[, \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

FIGURE 2.6 – Courbe de $x \mapsto \arcsin x$.

2.2.5 Fonction $\arccos$

La fonction $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ est continue strictement décroissante, $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$. Donc, elle admet une fonction réciproque notée : $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$

$$\begin{cases} y = \arccos x, \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \cos y, \\ y \in [0, \pi] \end{cases}$$

La fonction $\arccos$ est continue strictement décroissante sur $[-1, 1]$ et

$$\forall x \in]-1, 1[, \arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2.2.6 La fonction $\arctan$

La fonction $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue strictement croissante, $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$. Donc, elle admet une fonction réciproque notée : $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$x \mapsto \arctan x$$

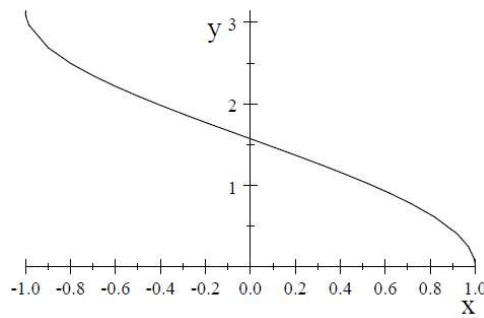


FIGURE 2.7 – Courbe de $x \mapsto \arccos x$.

$$\begin{cases} y = \arctan x, \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \tan y, \\ y \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\end{cases}$$

La fonction $\arctan$ est continue impaire, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, -\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$$

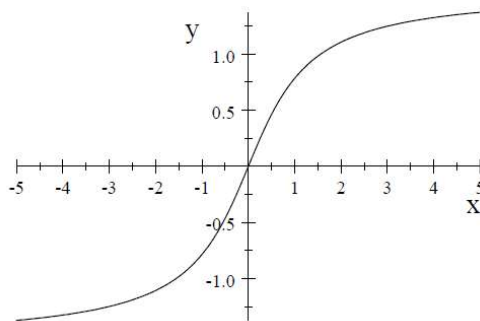


FIGURE 2.8 – Courbe de $x \mapsto \arctan x$.

2.3 Limite d'une fonction

Dans toute la suite on désignera par I un intervalle de $\mathbb{R}$

Définition 2.5. Soit $x_0 \in I$, et f une fonction définie sur I (sauf peut être en $x_0 \in I$). On dit que :

a) f admet en x_0 la limite $l \in \mathbb{R}$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (0 < |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - l| < \varepsilon)$$

On note : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

b) f admet à droite la limite $l_1 \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (0 < x - x_0 < \eta \implies |f(x) - l_1| < \varepsilon)$$

On note : $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l_1$ ou encore $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_1$

c) f admet à gauche la limite $l_2 \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (0 < x_0 - x < \eta \implies |f(x) - l_2| < \varepsilon)$$

On note : $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l_2$ ou encore $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_2$

Théorème 2.1.

- a) f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en un point $x_0 \in I$, si et seulement si f admet une limite à gauche en x_0 et une limite à droite en x_0 et que ces deux limites sont égales à l .
- b) Soit f définie sur I (sauf peut être en $x_0 \in I$). Si f admet une limite au point x_0 , alors cette limite est unique.

Définition 2.6.

- a) Soit f définie dans un voisinage I de x_0 (sauf peut être en $x_0 \in I$)
- a.1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ si : $\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (0 < |x - x_0| < \eta \implies f(x) > A)$
- a.2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ si : $\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (0 < |x - x_0| < \eta \implies f(x) < -A)$
- b) Soit f définie sur : $I =]a, +\infty[$
- b.1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ si : $\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, (x > B \implies |f(x) - l| < \varepsilon)$
- b.2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ si : $\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, (x > B \implies f(x) > A)$
- b.3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ si : $\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, (x > B \implies f(x) < -A)$
- c) Soit f définie sur $I =]-\infty, a[$
- c.1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ si : $\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, (x < -B \implies |f(x) - l| < \varepsilon)$
- c.2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ si : $\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, (x < -B \implies f(x) > A)$
- c.3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ si : $\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, (x < -B \implies f(x) < -A)$

Proposition 2.2. (Opérations sur les limites)

Soient f et g deux fonctions définies sur I (sauf peut être en $x_0 \in I$) tels que : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l'$, avec $l, l' \in \mathbb{R}$, alors on a :

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l + l'$
- b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, on a : $\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x)) = \alpha \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha l$
- c) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \times \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \times l'$
- d) Si $l' \neq 0$ on a : $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{l}{l'}$

Remarque : Les formes suivantes n'ont pas de sens :

$$\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0 \times (\pm\infty), +\infty - \infty \text{ et } -\infty + \infty, 1^{+\infty}, 1^{-\infty}$$

On les appelle des formes indéterminées.

Proposition 2.3. (Théorème de gendarmes)

Soient f, g et h définies sur I , (sauf peut être en $x_0 \in I$), telles que : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l' \in \mathbb{R}$, alors on a :

- a) Si $f(x) \geq 0$ au voisinage de x_0 , alors $l \geq 0$
- b) Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de x_0 , alors $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l'$
- c) Soit $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ et j une fonction définie sur I (sauf peut être en $x_0 \in I$), alors si $f(x) \leq j(x) \leq h(x)$ au voisinage de x_0 , alors j admet une limite au point x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0} j(x) = l$

2.4 Fonctions continues

Définition 2.7. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I ,

- a) On dit que f est continue en $x_0 \in I$, si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$
- b) f est continue à droite en $x_0 \in I$, si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$
- c) f est continue à gauche en $x_0 \in I$, si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$
- d) Si $I = [a, b]$, on dit que f est continue en $x_0 = a$ (resp. $x_0 = b$) si f est continue à droite de a (resp. à gauche de b)
- e) f est continue sur I si et seulement si elle est continue en tout point de I .

Proposition 2.4.

- 1) Si f et g sont continues en x_0 , alors $f + g$, fg , $|f|$, et λf , $\lambda \in \mathbb{R}$, sont continues en x_0 . Si de plus $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en x_0 .
- 2) (Composée de fonctions continues)
Soit f et g deux fonctions qu'on peut les composer, et I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$, sur lesquels sont définies f et g respectivement.
Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors, $g \circ f$ est continue en x_0 .

Définition 2.8. Soit f une fonction définie sur un intervalle I (sauf peut être en $x_0 \in I$), si f admet une limite finie l au point x_0 , la fonction $\tilde{f}$ définie par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{x_0\}, \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

coincide avec f sur $I \setminus \{x_0\}$ est continue au point x_0 . $\tilde{f}$ est appelée **prolongement par continuité de f en x_0**

Théorème 2.2. (Théorème de Valeurs Intermédiaires (T.V.I.))

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, alors, pour tout réel c compris entre $f(a)$ et $f(b)$, $\exists x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = c$.

En d'autres termes : l'équation $f(x) = c$ d'inconnue x admet au moins une solution dans $[a, b]$, pour tout c compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Corollaire 2.1. Si la fonction f est continue sur $[a, b]$ tel que $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]a, b[$. Si de plus, la fonction f est strictement monotone, cette solution est unique.