Probabilités

SOMMAIRE

Chapitre 1.

Introduction et concepts de base

Chapitre 1.
Introduction et concepts de base

1. Définition de la théorie des probabilités

L'origine de la théorie des probabilités est le jeu de dés. La théorie des probabilités est une science qui a pour but l'étude des expériences aléatoires. Elle vise à construire des modèles mathématiques afin d'analyser des situations impliquant l'incertitude.

En d'autres termes, la théorie des probabilités fournit des modèles mathématiques qui permettent l'étude d'une expérience dont le résultat ne peut être prévu avec une totale certitude. Elle vise ainsi à définir des mesures exactes de cette incertitude par l'intermédiaire de ces modèles.

2. Probabilités vs Statistique

Dans une population dont on connait certaines caractéristiques, on s'interroge souvent sur la qualité de l'information que l'on peut obtenir à partir d'un échantillon tiré de cette population connue. Cette question est importante en gestion, puisque bon nombre de décisions sont prises dans telles situations.

L'une des questions essentielles auxquelles s'intéressent les probabilités peut se résumer de la façon suivante : comment obtenir des informations sur une population à partir d'une mesure de variables sur un échantillon ? En d'autres termes : Comment à partir d'un échantillon prélevé dans une population connue, est-il possible d'obtenir un certain nombre d'informations qui la concernent ?

Dans les entreprises, la pratique des études de marché relève de la même démarche. On interroge un échantillon de clients sur leur appréciation d'un produit, leurs habitudes de consommation par exemple, et l'on déduit des profils de clients en *principe valides* pour toute la clientèle.

La théorie des probabilités cherche donc à apporter des outils et des techniques permettant de répondre scientifiquement à ces questions. Le raisonnement des probabilités est ainsi un raisonnement déductif.
Par contre, le raisonnement de la statistique est un raisonnement inductif, qui consiste à prédire les caractéristiques d'une population *inconnue* à partir des statistiques déterminées dans un échantillon représentatif et connu de cette population.

D'autre part, un gestionnaire peut faire face à des situations où la connaissance du problème traité est limitée, mais il arrive un moment où il doit choisir entre un oui et un non et ceci en utilisant la théorie des tests statistiques[2]. Notons que cette théorie permet une analyse qui conduit à évaluer la probabilité de prendre une mauvaise décision et donc de se tromper. Les tests statistiques indiquent de ce fait, la *vérité* la plus proche, et dans certaines situations permettent d'évaluer le coût associé à une erreur.

3. Expérience aléatoire & univers des possibles

3.1 Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est tout processus ou toute action impliquant une certaine intervention humaine, qui aboutit à un *résultat*, qui peut être défini comme une *observation* suite à cette expérience.

Une expérience aléatoire représente toute expérience qui satisfait aux conditions suivantes :

- Son résultat dépend du hasard. Ceci dit, on ne peut pas prévoir ou prédire avec certitude le résultat de l'expérience ;
- On peut décrire tous les résultats possibles avant l'expérience ;
- On peut répéter l'expérience dans les mêmes conditions.

[2] La théorie des tests statistiques sort du contexte de cet ouvrage.

Exemples d'expériences aléatoires :

- Lancer une pièce de monnaie ;
- Observer le nombre de pièces défectueuses dans un lot ;
- Observer le nombre de clients qui entrent dans un magasin dans une période précise.

3.2 Ensemble fondamental ou univers des possibles Ω

L'ensemble fondamental ou l'univers des possibles[3] - qu'on note **Ω** - est l'ensemble de tous les résultats possibles (*ou issues*) d'une expérience aléatoire. Ainsi, Ω est un ensemble dont les éléments représentent *tous les résultats possibles* ou *les événements élémentaires* d'une expérience aléatoire quelconque.

Exemple :

On lance un dé et on note le résultat obtenu.

L'univers des possibles est : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Bien évidemment, l'ensemble fondamental Ω associé à une expérience aléatoire peut varier en fonction des objectifs escomptés.

On peut noter que la description de l'univers des possibles peut se faire d'une manière explicite ou implicite.

La description explicite consiste à énumérer tous les éléments de l'ensemble fondamental Ω, par contre la description implicite, consiste à utiliser un formalisme mathématique pour décrire cet ensemble.

Par ailleurs, un ensemble fondamental ou un univers des possibles[4] peut être un ensemble *fini* ou un ensemble *infini*. Il peut être :

- Un ensemble fini, si l'ensemble fondamental contient un nombre fini de résultats ;

---

[3] Dans cet ouvrage, on utilisera les deux appellations.

[4] Ou encore un espace échantillon.

- Un ensemble infini, si l'ensemble fondamental contient un nombre infini de résultats, et dans ce cas, il peut être :
- un ensemble dénombrable (discret), si toutes les *issues* peuvent être énumérées ;
- un ensemble non dénombrable (continu), si toutes les *issues* ne peuvent pas être énumérées.

En conclusion, la théorie moderne des probabilités utilise le concept des ensembles pour modéliser une expérience aléatoire. L'univers des possibles Ω est ainsi un ensemble dont les éléments représentent tous les *événements élémentaires (ou issues)* d'une expérience aléatoire[5].

[5] On suppose dans ce qui suit que Ω est un ensemble fini, pour que les concepts présentés soient simples à comprendre et par la suite on prendra en considération le cas où Ω est un ensemble infini.

4. Exercices corrigés

Exercice 1

Soit l'expérience aléatoire qui consiste à lancer une pièce de monnaie 2 fois de suite et à observer la suite de piles (P) ou de faces (F) obtenues.

- *Déterminez Ω.*

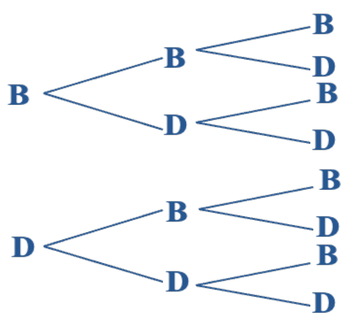
Solution

Ω ={(B,B),(B,D),(D,B), (D,D)}

Bonus ! Dans le cas où notre expérience aléatoire consiste à lancer la pièce de monnaie 3 fois, l'ensemble fondamental est :

Ω ={(B,B,B),(B,B,D),(B,D,B),(B,D,D), (D,B,B), (D,B,D), (D,D,B), (D,D,D)}

Nous pouvons aussi utiliser l'arbre de probabilité pour déterminer Ω, comme ci-dessous :



Exercice 2

Soit l'expérience aléatoire qui consiste à choisir une pièce 3 fois de suite et à observer si elle est bonne (B) ou de défectueuse (D).

- *Déterminez Ω.*

Solution

$$\Omega = \left\{(\omega_1,\omega_2,\omega_3) \text{ tel que } \omega_{\mathrm{i}} \in \left\{\mathrm{B,D}\right\}, \mathrm{i} = 1,2,3\right\}$$

Comme dans l'exercice précédent, nous pouvons utiliser l'arbre de probabilité pour décrire Ω d'une façon explicite.

Exercice 3

Soit l'expérience qui consiste à lancer *une pièce de monnaie* et *1 dé* et à observer les côtés qu'ils présentent.

- *Déterminez Ω d'une façon implicite et explicite.*

Solution

Description implicite

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \text{ tel que } \omega_1 \{P, F\} \text{ et } \omega_2 \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$$

Description explicite

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (P,1),(P,2),(P,3),(P,4),(P,5),(P,6) \\ (F,1),(F,2),(F,3),(F,4),(F,5),(F,6) \end{Bmatrix}$$

Exercice 4

Dans une chaîne de production, pour contrôler la qualité d'un lot de pièces produites par une machine, un gestionnaire prélève 3 pièces.

Pour chaque pièce, il vérifie si elle est bonne (B) ou défectueuse (D).

- *Déterminez Ω.*

Solution

$$\Omega = \{(B,B,B),(B,B,D),(B,D,B),(B,D,D),(D,B,B),(D,B,D),(D,D,B),(D,D,D)\}$$

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \text{ tel que } \omega_i \in \{B, D\}, \, i = 1,2,3\}$$

Exercice 5

Nous disposons de 5 cartes

- *Déterminez Ω*
- *Supposant un petit enfant qui ne connait que les couleurs, déterminez Ω.*

Solution

Dans le premier cas :

$$\Omega = \{RR, RN, 10R, 10N\}$$

Sachant que RR : Reine rouge, RN : Reine Noire, 10R : 10 Rouge et 10N : 10 Noir.

Dans le deuxième cas :

$$\Omega = \{Rouge, Noire)\}$$

NB. L'objectif de cet exercice est de souligner que *le niveau de détail à choisir pour déterminer l'univers des possibles est lié au problème à résoudre*.

Exercice 6

On tire au hasard des pièces dans un lot et on observe le nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois une pièce défectueuse.

On suppose que :

- Le lot contient au moins une pièce défectueuse ;
- Les tirages s'effectuent avec remise.
- Les pièces peuvent être bonnes (B) ou défectueuses (D)

  - *Déterminez Ω*

Solution

Lorsqu'on obtient une pièce défectueuse (D) on arrête l'expérience, et cette dernière elle peut durer si on n'obtient pas cette pièce défectueuse.

On peut décrire les cas comme suit :

$$\Omega = \{D, (B,D),(B,B,D), (B,B,B,D),\ldots\ldots\}$$

Puisqu'on s'intéresse au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois une pièce défectueuse dans ce cas :

$$\Omega = \{1,2,3,4,\ldots.. \}$$

Exercice 7

On observe depuis l'ouverture d'un magasin le nombre de clients (homme) qui entre jusqu'au moment où la première cliente y entre.

On suppose qu'il y a au moins un client par jour qui entre dans le magasin.

- *Déterminez Ω*

Solution

$\Omega = \{0,1,2,3,4\ldots..\}$

C'est un ensemble infini dénombrable (discret).

Exercice 8

On observe durant une journée le temps écoulé en minutes, depuis l'ouverture d'un magasin jusqu'au moment où le premier client y entre.

On suppose que :

- Il y a au moins un client par jour qui entre dans le magasin ;
- Le magasin est ouvert pendant 10 heures.
- *Déterminez Ω*

Solution

$$\Omega = \left\{\omega \text{ tel que } \omega \in \left[0,600\right]\right\}$$

C'est un ensemble infini non dénombrable (continu).

Chapitre 2.

Evénements et calcul de probabilités

Chapitre 2.
Evénements et calcul de probabilités

1. Evénement aléatoire

Un événement aléatoire est un sous-ensemble de l'ensemble fondamental (Ω), associé à une expérience aléatoire, qui peut *se réaliser ou non* au cours de cette expérience.

On note cet événement par une lettre majuscule (A, B, C, D, E,...). Il peut être aussi indicé (A_1, A_2, …). Un événement A se réalise *si et seulement si* l'expérience aléatoire donne *un des résultats* constituant cet événement. Les événements sont munis d'une mesure « **P** » pour **P**robabilité, qui sera détaillée dans les sections suivantes.

2. Catégories des événements

On peut citer plusieurs types d'événements :

- Evénement élémentaire[6] : lorsque l'événement se réduit à un seul résultat qui ne peut être décomposé.
- Evénement composé : tout événement qui peut être obtenu par la combinaison d'événements élémentaires.

  Exemple : on lance un dé, l'événement A « Obtenir un chiffre pair » est un événement composé d'événements élémentaires {2}, {4}, {6} de l'ensemble fondamental Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
- Evénement impossible : c'est l'événement qui n'est jamais réalisé (désigné par l'ensemble vide). Il correspond à une propriété qui n'est possédée par aucun résultat possible de l'expérience.
- Evénement certain : c'est l'événement qui se réalise toujours, et ceci à chaque répétition de l'expérience. L'événement certain est défini par une propriété que possèdent tous les résultats possibles de l'expérience, il est ainsi représenté par l'ensemble Ω lui-même.

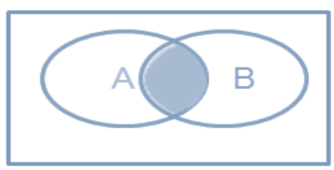
[6] Ou encore un événement indécomposable.

3. Opérations sur les événements

On considère A et B deux événements de l'ensemble fondamental (Ω). Les opérations logiques sur les événements : « ou », « et » ou « négation » se traduisent *respectivement* par les opérations de *réunion*, d'*intersection*, et de *passage au complémentaire*. Ci-dessous la définition de chacune de ces opérations.

- Réunion d'événements $\cup$: A ou B, notée $A \cup B$: est l'événement qui se réalise si A ou B se réalise ou les deux se réalisent. En d'autres termes, c'est un événement composé des éléments qui appartiennent soit à A, soit à B soit à A et B, c'est-à-dire les deux à la fois. Dans le diagramme de Venn, $A \cup B$ est la partie colorée :
- Intersection d'événements $\cap$: A et B, notée $A \cap B$: c'est l'événement qui se réalise si A et B se réalisent en même temps. C'est un événement composé des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.

  Dans le diagramme de Venn $A \cap B$ est représentée par la partie colorée :



Ces deux opérations peuvent bien évidemment faire intervenir plus de deux événements. Ainsi, si on considère $A_1, \ldots, A_n$ des événements élémentaires :

$$\bigcup_{i=1}^{n} Ai = A_1 \cup A_2 \cup A_3 .... \cup A_n$$

Cette union est l'ensemble des événements élémentaires[7] {ω} qui sont dans *l'un au moins* des A_i. C'est donc l'événement { réalisation de l'un *au moins* des A_i ($1 \leq i \leq n$) }.

Si on considère l'intersection :

$$\bigcap_{i=1}^{n} Ai = A_1 \cap A_2 \cap A_3 .... \cap A_n$$

[7] Ou encore singletons.

Cette intersection est l'ensemble des événements élémentaires $\{\omega\}$ qui sont dans tous les A_i. C'est donc l'événement { réalisation de chacun des A_i ($1 \leq i \leq n$) }.

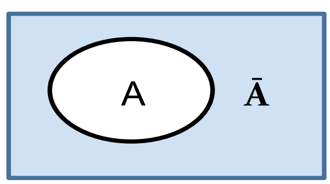
On peut étendre ces définitions aux réunions et intersections d'une suite infinie d'événements.

$\bigcup_{i=1}^{+\infty} Ai$: {Réalisation de l'un au moins des Ai, $i \in N$},

$\bigcap_{i=1}^{+\infty} Ai$:{Réalisation de tous les Ai, $i \in N$}.

On peut souligner que ces opérations sur les suites d'événements sont très utiles pour analyser des événements complexes, à l'aide d'événements plus simples à calculer, afin de calculer par la suite leur probabilité.

- Négation (événement contraire) : non A ou $\bar{A}$ ou A^c : c'est l'événement qui se réalise si A ne se réalise pas (c'est une partie complémentaire de A).
  C'est un événement constitué des résultats élémentaires qui ne sont pas inclus dans A.

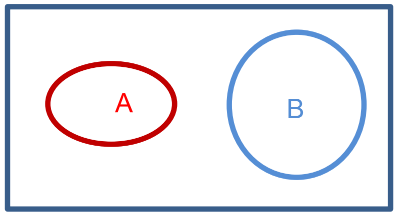


- Egalité : deux événements A et B sont égaux, s'ils sont représentés par deux sous-ensembles qui incluent des éléments identiques, on note A = B.

- Evénements incompatibles : les événements A et B sont incompatibles[8], si A et B ne peuvent pas se réaliser en même temps ou simultanément. Les événements A et B n'ont pas d'éléments en commun et leur intersection est l'ensemble vide : $A \cap B = \emptyset$.

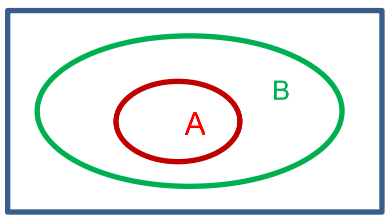
---

[8] Ou exclusifs.



- Inclusion (ou implication) d'un événement : l'événement A implique l'événement B, si la réalisation de A entraine la réalisation de B. En d'autres termes, si tous les résultats de A font partie de B.

On note ainsi que l'événements A implique l'événement B, si A est inclus dans B. Dans le diagramme de Venn nous pouvons noter que A est inclus dans B si tout élément de A appartient à B.



4. Système complet d'événements

Soient A_1, A_2, ..., A_n ; n événements aléatoires. A_1, A_2, ..., A_n constituent un ***système complet d'événements*** si ces événements forment une partition de Ω, *c'est à dire* :

- Ils sont deux à deux *incompatibles* : pour tout $i \neq j$; $A_i \cap A_j = \varnothing$.
- Leur réunion est l'événement certain Ω :

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$$

En appliquant la *probabilité*[9], on obtient :

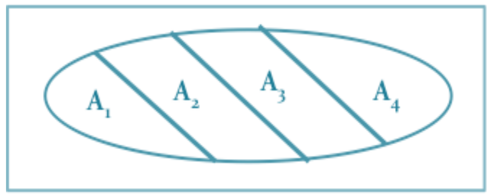
$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(\Omega)$$

[9] La définition de la probabilité sera abordée dans la section suivante.

Ou bien :

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(\Omega)$$

On peut schématiser ci-dessous un système complet d'événements tel que n=4 :



On peut aussi noter que les événements A et $\bar{A}$ constituent un système complet d'événements.

5. Définitions de la probabilité

Si on demande à un étudiant, au début et à la fin du semestre quelle est *sa probabilité de réussir* à valider un module, sa réponse va en fait mesurer la *vraisemblance* de sa réussite ou la *croyance* qu'il met dans la réalisation de cet événement.
Bien évidemment, cette probabilité n'est pas appréciée de la même façon par un autre étudiant ou même par le même étudiant à des moments différents, par exemple, au début et à la fin du semestre.

Cette probabilité est qualifiée de probabilité subjective, *en opposition* au cas de tirer une pièce au hasard et vérifier si elle est bonne ou défectueuse, où on se trouve face à une probabilité dite *objective*.
La détermination des probabilités subjectives n'est pas abordée dans le cadre de cet ouvrage, on abordera plutôt les approches qui se basent sur les probabilités objectives, qui constituent la théorie des probabilités.

5.1 Notions de base

La probabilité, notée **P** peut être considérée comme une fonction d'ensembles, qui à un événement associe un *nombre* compris entre 0 et 1 afin de mesurer *les chances de réalisation* de cet événement.

P peut être ainsi considéré comme une fonction ayant un *domaine de définition* $\mathcal{F}$ qui est en général plus petit que l'ensemble de toutes les parties de Ω qu'on note P (Ω).

Les propriétés de $\mathcal{F}$ qu'on appelle *tribu* sur Ω sont les suivantes :

- $\mathcal{F}$ contient Ω et tous les singletons {ω}.
- $\mathcal{F}$ est stable par passage au complémentaire, ceci dit, si A est un événement de $\mathcal{F}$, A^c est aussi un événement de $\mathcal{F}$.
- $\mathcal{F}$ est stable si on considère les opérations de réunion et d'intersection sur les suites d'événements. Ceci dit, si A_1, A_2, A_3…constituent une suite d'événements finie ou infinie de $\mathcal{F}$, sa réunion et son intersection sont aussi des événements de $\mathcal{F}$.

Le couple (Ω, $\mathcal{F}$) est nommé un espace *probabilisable*.

Le couple (Ω, P) est nommé un espace de *probabilité*.

Le triplet (Ω, $\mathcal{F}$, P) est nommé un espace *probabilisé*.

On explicite ci-dessous trois définitions de la probabilité : la définition axiomatique basée sur une *approche théorique* de *Kolmogorov*, la définition *classique* et la définition *fréquentielle*.

5.2 Définition axiomatique simplifiée de la probabilité

Approche théorique de Kolmogorov

Soit une expérience aléatoire avec « n » résultats (issues) représentés par l'univers des possibles $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n\}$. Soit $P(\Omega)$, l'ensemble de toutes les parties de Ω et A un événement appartenant à Ω.

Une *probabilité P* sur $P(\Omega)$, est toute application p de $P(\Omega)$ dans $[0,1]$ qui vérifie les axiomes suivants :

- *Axiome 1*. La somme des probabilités de tous les événements élémentaires est égale à 1 : $p(\{\omega_1\}) + p(\{\omega_2\}) + p(\{\omega_3\}) + \ldots + p(\{\omega_n\}) = 1$ ceci dit $P(\Omega)=1$,
- *Axiome 2*. La probabilité d'un événement A est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent. Ceci dit, pour une suite A_i d'événements de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints ou incompatibles :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

- *Axiome 3*. Pour tout événement A : $0 \leq P(A) \leq 1$

5.3 Définition classique de la probabilité

La définition classique de la probabilité est un cas particulier de la définition axiomatique. Soit (Ω, P) un espace de probabilité correspondant à une expérience aléatoire dont l'ensemble des résultats « n » est fini et $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n\}$.

On suppose que tous les événements élémentaires ω_i ont la même probabilité. Ainsi on se trouve dans une situation d'équiprobabilité et pour tout ω_i :

$$P(\omega_i) = \frac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{1}{n}$$

En appliquant l'axiome 2, on peut noter que pour un événement A, la probabilité de ce dernier est :

$$P(A) = \frac{\mathrm{Card}\ (A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$$

On peut souligner que Card (A) est l'ensemble des résultats favorables qui réalise cet événement.

La probabilité d'un événement A est donc le nombre de cas favorable qui réalise l'événement A divisé par le nombre de cas possibles.

Supposant qu'on dispose de « n » cas favorables et de « N » cas possibles[10], P (A) est égale à :

$$\mathbf{(5.3)} \qquad \mathrm{P(A)} = \frac{\text{Nombre de cas favorable}}{\text{Nombre de cas possible}} = \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{N}}$$

Remarque sur la situation d'équiprobabilité

En probabilité, on se trouve face à des situations d'équiprobabilité des événements élémentaires. Il est important de souligner que *si on dispose de « k » éléments, ceci n'implique pas d'avoir "une chance sur k" qu'un événement se produise*.[11]

5.4 Définition fréquentielle de la probabilité

Soit (Ω, P) un espace de probabilité correspondant à une expérience aléatoire et A un événement associé à cette expérience. On répète l'expérience « *n* » fois de façon indépendante et dans les *mêmes conditions*.

- n (A) correspond au nombre de réalisations de A au cours des n répétitions,
- Lorsque *n* augmente, on peut étudier le *comportement* de la fréquence :

$$\mathrm{f_n(A)} = \frac{\mathrm{n\ (A)}}{\mathrm{n}}$$

La définition fréquentielle est basée sur la constatation que ces fréquences ont tendance à se stabiliser autour d'une valeur spécifique qui est la « *probabilité* », quand le nombre

[10] Il est souvent difficile d'énumérer tous les résultats possibles de Ω et les résultats favorables qui réalisent l'événement A, pour déduire par la suite P(A). Pour résoudre ce problème, on utilise l'analyse combinatoire, qui est introduite dans le chapitre 3.

[11] On peut considérer une expérience aléatoire qui consiste à lancer une pièce de monnaie et obtenir « pile » ou « face », et une autre expérience qui consiste à tirer au hasard une boule blanche d'une urne qui contient 3 boules blanches et 3 boules noires. La probabilité d'avoir une boule blanche et la probabilité d'obtenir un « pile » est la même (1/2).

d'observations devient élevé. Encore faut-il que l'expérience aléatoire soit répétitive et dans les mêmes conditions.

Notons que dans ce cas :

$$P(A) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n\,(A)}{n}$$

On peut aussi noter que cette approche fréquentielle sert à donner une valeur numérique à la probabilité d'un événement, plutôt que de donner une définition de la probabilité.

On peut aussi souligner que les trois axiomes de Kolmogorov sont satisfaits soit par la définition classique, soit par la définition fréquentielle de la probabilité.

5.5 Définition simplifiée d'une loi de probabilité

Cas d'un ensemble fini

Soit Ω un ensemble fini tel que $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_n\}$, définir une loi de probabilité P revient à :

- Poser, pour tout indice i, $P(\{\omega_i\}) = p_i$
- Se donner n réels *positifs ou nuls* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Ainsi, on peut déterminer une loi de probabilité sur Ω si pour un événement A :

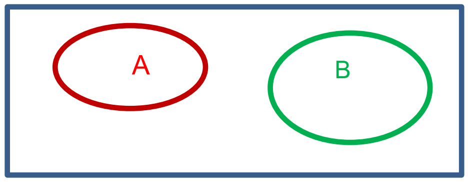
- P (A) est calculable,
- P (A) est égale à $\sum p_i$, tel que p_i représente les probabilités des événements $\{\omega_i\}$ qui composent A.

6. Propriétés et règles de calcul des probabilités

Un certain nombre de propriétés découlent des trois axiomes présentés dans la section précédente.

6.1 Evénements incompatibles

Soit Ω l'ensemble fondamental correspondant à une expérience aléatoire. A et B deux événements relatifs à une même expérience. Si A et B sont des *événements incompatibles* ou mutuellement exclusifs, comme on peut le présenter dans le diagramme de Venn ci-dessous, alors : P (A ∪ B) = P (A) + P (B).



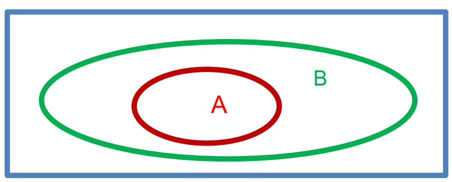
Plus généralement, si A_1, A_2,…, A_n est une suite d'événements qui sont *deux à deux incompatibles* (ou qui constituent une partition de Ω) alors :

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

6.2 Inclusion d'un événement

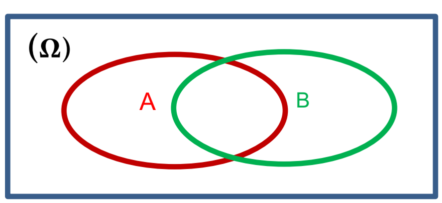
On considère deux événements A et B tels que A ⊆ B comme présenté dans le diagramme de Venn ci-dessous :



Alors, ∀ A ∈ $\mathcal{F}$, ∀ B ∈ $\mathcal{F}$, si A ⊆ B ceci implique que P (A) ≤ P (B).

6.3 Réunion d'événements (loi d'addition)

On considère A et B deux *événements quelconques* comme présentés dans le diagramme de Venn ci-dessous:



Si A et B *ne* sont *pas* incompatibles, il est nécessaire de distinguer dans leur réunion le rôle joué par l'intersection $A \cap B$. La probabilité de la réunion de ces deux événements :

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

En conclusion, soit A et B deux *événements quelconques* :

$\forall A \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{F}, \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. On peut la démontrer en utilisant :

$A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$ sachant que :

$A = (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$,

$B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$.

Si on considère A, B et C trois *événements quelconques* alors :

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

6.4 Autres propriétés

En prenant en considération la formule (5.3) on peut facilement démontrer les propriétés suivantes :

- Pour un événement A :

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- Si parmi « **N** » cas possibles, « **n** » sont des cas favorables à l'événement A; (N – n) sont des cas favorables à $\bar{A}$. Ainsi la probabilité de $\bar{A}$:

$$P(\bar{A}) = \frac{N-n}{N} = \frac{N}{N} - \frac{n}{N} = 1 - \frac{n}{N}$$

Ceci dit :

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ou bien $P(\bar{A}) + P(A) = 1$

On met donc en exergue que la somme des probabilités d'un événement et de son complémentaire est égale à 1 :

$\forall A \in \mathcal{F}, P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

- Si le nombre de cas favorables est nul : P (A) = 0 = P (∅), ce qui correspond à la probabilité de l'événement impossible.

- Si le nombre de cas favorables est égal à N : P (A) = 1 = P (Ω), ce qui correspond à la probabilité de l'événement certain.

7. Exercices corrigés

Exercice 1

Un gestionnaire contrôle la qualité d'un lot de pièces produites par une machine X. Il prélève 2 pièces de ce lot et pour chacune il note si elle est bonne (B) ou défectueuse (D).

- *Décrivez A un événement aléatoire, tel que A : « obtenir au moins 1 bonne pièce ».*

Solution

Ω ={(B,B),(B,D),(D,B), (D,D)}

A : obtenir au moins 1 bonne pièce.

A = {(B, B), (B, D), (D, B)}

Exercice 2

Un gestionnaire contrôle la qualité de la peinture des voitures dans une ligne de production X pendant une semaine. Il sélectionne 3 voitures et pour chacune il note s'il existe un problème d'égratignures **(**s'il existe (O) sinon (N)).

- *Décrivez l'événement aléatoire A, tel que A : « obtenir au moins 2 voitures sans aucune égratignure ».*

Solution

Ω ={(O,O,O),(O,O,N),(O,N,O),(O,N,N), (N,O,O), (N,O,N), (N,N,O), (N,N,N)}

A : obtenir au *moins* 2 voitures sans aucune égratignure.

A ={(O,N,N), (N,O,N), (N,N,O), (N,N,N)}

Exercice 3

Un gestionnaire contrôle la qualité d'un lot de pièces produites par une machine X. Il prélève 3 pièces de ce lot et pour chacune il note si elle est bonne (B) ou défectueuse (D).

- Evénement A : n'obtenir aucune pièce défectueuse.
- Evénement B : obtenir exactement une pièce défectueuse.
- Evénement C : obtenir au plus une pièce défectueuse.

Décrivez A, B et C

Solution

Ω ={(B,B,B),(B,B,D),(B,D,B),(B,D,D), (D,B,B), (D,B,D), (D,D,B), (D,D,D)}

A = {(B,B,B)}

B = {(B,B,D), (B,D,B),(D,B,B)}

C= {(B,B,B), (B,B,D),(B,D,B,), (D,B,B)}

Nous pouvons noter que :

- ◊ A est un événement simple
- ◊ B et C sont des événements composés
- ◊ A et B sont incompatibles
- ◊ A implique C
- ◊ B implique C

Exercice 4

Soit un univers des possibles Ω associé à une expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé équilibré une fois.

Soit l'événement A « obtenir un nombre pair ≥ 4 ».

- *Calculez la probabilité de A.*

Solution

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

A = « Obtenir un nombre pair ≥ 4 ».

Sous l'hypothèse de l'équiprobabilité, on assigne à chacun des 6 résultats une probabilité de 1/6.

$$A = \{4, 6\} = \{4\} \cup \{6\}.$$

$$P(A) = P(\{4\}) + P(\{6\}) = 2/6 = 1/3$$

Exercice 5

On dispose des cinq cartes ci-dessous et on tire une carte au hasard parmi les cinq.

◊ A = Obtenir une reine.

◊ B = Obtenir une reine noire.

◊ C = Obtenir un 10.

Calculez la probabilité de A, B et C.

Solution

P(A) = 3/5.

P(B) = 1/5.

P(C) = 2/5.

NB. Dans notre exemple, A et C sont deux événements complémentaires.

Rappel : 2 événements E_1 et E_2 sont *complémentaires* si $E_1 \cup E_2 = \Omega$ et $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

Exercice 6

On lance 2 dés équilibrés. On s'intéresse à la somme des deux résultats. Soit l'événement A : « obtenir la somme de 10 ».

- *Calculez la probabilité de A.*

Solution

Nous pouvons noter que :

- Ω = {(1,1), (1,2),…, (6,6)}
- Nombre de cas possibles : 36 cas

Puisqu'on s'intéresse à la somme des deux résultats, les cas possibles sont les suivants : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ,11 ,12

Dans ce cas la probabilité de l'événement A « obtenir la somme de 10 » est égale à 1/12.

Le nombre de cas favorables qui est de 3 sur le nombre de cas possibles qui est de 36 cas.

P(A) = 3/36 = 1/12

Bonus ! On peut utiliser par exemple le schéma ci-dessous qui représente la somme des résultats des deux dés.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Chapitre 3.
Analyse combinatoire

1. Définition de l'analyse combinatoire
2. Règle du produit
3. Permutation
4. Arrangement
5. Combinaison
6. Tirage *avec* remise et tirage *sans* remise
7. Exercices corrigés

Chapitre 3.
Analyse combinatoire

Comme précisé auparavant, la définition classique de la probabilité d'un événement A, se base sur le nombre de cas possibles appartenant à Ω et le nombre de cas favorables à la réalisation de cet événement. Pour calculer ces nombres, on utilise le plus souvent les techniques de dénombrement ou l'analyse combinatoire.

1. Définition de l'analyse combinatoire

L'analyse combinatoire est un ensemble de formules qui ont pour objectif de dénombrer les différentes dispositions que l'on peut former à partir des éléments d'un ensemble fini.
En effet, c'est un ensemble de méthodes et de techniques qui peuvent répondre à des questions comme :

- *Combien peut-on constituer de groupes différents de k éléments choisis dans une population de n éléments, si l'ordre de tirage a de l'importance ou non ?* [12]

2. Règle du produit[13]

Soit une expérience aléatoire sous forme d'un couple (A_1, A_2). A_1 et A_2 se présentent respectivement de n_1 et n_2 façons distinctes. On note que l'opération A_1 est effectuée en premier lieu, suivie de l'opération A_2 [14].
Le nombre total d'événements élémentaires associés à cette expérience est : $n_1 \times n_2$

3. Permutation

Soit une expérience aléatoire qui consiste à placer *n* individus/objets les uns à côté des autres.

---

[12] *Apporter une réponse à ce genre de questions purement techniques est indispensable avant d'aborder des lois de probabilités*.
[13] Ou encore principe de multiplication.
[14] Cette situation peut être représentée par un arbre de probabilité (ou arbre de représentation), dont les éléments déterminent les différentes possibilités de résultats.

La question qu'on peut se poser est la suivante : de combien de façons distinctes peut-on placer ces n individus/objets les uns à côté des autres ?

Pour répondre à cette question, on utilise *la règle du produit*. En conséquence, placer le premier individu peut se faire de *n* façons distinctes. Le deuxième individu, ne dispose alors que de *n-1* possibilités, le troisième que de *n-2* possibilités, etc.*, et le dernier* de 1 possibilité. Le produit de ces possibilités représente *le nombre de permutations* de n individus/objets :

$$P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times 2 \times 1$$

Rappel de la notion factorielle

On désigne par (n!) qui se lit *factorielle* ***n***, le produit des n premiers entiers positifs :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

Exemple : $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

Exemple de la règle de simplification :

$$\frac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8$$

On peut noter que par définition $0! = 1$ et bien évidemment on peut facilement le démontrer en remplaçant n par 1 dans $n! = n \times (n-1)!$

Définition

Soit A un ensemble de n éléments. Une permutation *sans répétitions* de ces *n* éléments est un *arrangement*[15] *sans répétitions* de ces n éléments *pris n à la fois*. Le nombre de permutations est noté P_n et il est égal à : $P_n = n!$

[15] L'arrangement est défini dans la section suivante.

4. Arrangement

Définition

Soit Ω un ensemble de n éléments. Un arrangement ***sans répétitions*** de ces n éléments pris k à la fois (k ≤ n), est *toute disposition ordonnée* de k éléments distincts choisis dans Ω. Le nombre de ces dispositions est le suivant :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A_n^k = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-(k-1))$$

- On peut noter que deux arrangements peuvent contenir les mêmes éléments, mais *pas dans le même ordre*.
- On peut aussi noter qu'une permutation *sans répétition* de n éléments n'est qu'une façon particulière d'ordonner ces *n* éléments :

$$A_n^n = P_n$$

5. Combinaison

Définition

Soit Ω un ensemble de n éléments distincts. Toute disposition *non ordonnée* de k éléments distincts (k ≤ n) choisis dans Ω est une combinaison *sans répétitions* de n éléments pris k à la fois :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{A_n^k}{P_k}$$

Le nombre de combinaisons est noté C_n^k ou encore $\binom{n}{k}$. On utilisera la première notation pour ce qui suit.

On peut mettre en exergue que : $C_n^0 = C_n^n = 1$ et $C_n^1 = n$

Pour calculer le nombre de combinaisons de k éléments distincts (k ≤ n) choisis dans A *sans répétitions* de *n* éléments, on peut utiliser le *triangle de Pascal* qui est une table qui fournit ce nombre.

Ci-dessous un exemple tel que $0 \leq k \leq 6$ et $0 \leq n \leq 6$. Mais l'objectif ici n'est pas le calcul du nombre de combinaisons, mais plutôt de montrer certaines propriétés. Le nombre de combinaisons peut facilement se calculer en utilisant plusieurs logiciels.

n| k	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	2	1				
3	3	3	1			
4	4	6	4	1		
5	5	10	10	5	1	
6	6	15	20	15	6	1

On remarque qu'à l'exception de la première colonne et la diagonale, on peut noter qu'un nombre quelconque de ce tableau est obtenu en sommant les deux nombres de la ligne précédente situés dans la même colonne et dans la colonne d'indice immédiatement inférieure.

Il est utile de remarquer que :

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

Cette formule est appelée la formule de Pascal.

On remarque aussi que :

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$C_n^0 = 1$$

$$C_n^n = 1$$

$$C_n^1 = n$$

6. Tirage *avec* remise et tirage *sans* remise

On considère une expérience qui consiste à tirer au hasard ***n*** boules dans une urne de N. Ces boules sont de deux types : des boules blanches et des boules noires. Soit n_1 et n_2 le nombre de boules blanches et de boules noires respectivement.

On peut avoir deux façons de tirer les *n* boules, soit ***sans*** remise ou ***avec*** remise. Dans ce cas, on peut se poser la question suivante :

Quelle est la probabilité de tirer r boules blanches dans les deux cas ?

Tirage sans remise

Dans ce cas, on écarte toujours les boules tirées. Cette situation correspond à ce que nous avons introduit dans la section 5 de cette partie. Les tirages ne sont plus indépendants puisque chaque tirage *modifie* la composition de l'urne.

La probabilité de l'événement A « tirer r boules blanches » tel que : $r \leq n_1$ et $(n - r) \leq n_2$ est :

$$P(A) = \frac{C_{n_1}^{r} C_{n_2}^{n-r}}{C_N^n}$$

Tirage avec remise :

Dans ce cas, l'expérience aléatoire qui consiste à tirer une boule est répétée n fois d'une façon indépendante puisque le contenu de l'urne ne change pas à chaque tirage.

La probabilité de tirer *une* boule blanche est de :

$$p = \frac{n_1}{N}$$

La probabilité de tirer *une* boule noire est de :

$$q = \frac{n_2}{N}$$

La probabilité de l'événement A « tirer r boules blanches » tel que $0 \leq r \leq n$:

$$P(A) = C_n^r \times \left(\frac{n_1}{N}\right)^r \times \left(\frac{n_2}{N}\right)^{n-r}$$

Ce cas correspond *au schéma de Bernoulli*[16].

[16] Le schéma de Bernoulli est introduit dans le chapitre 6 qui concerne les lois de probabilités.

6.1 Combinaison *avec* répétition

Soit Ω un ensemble de n éléments. Une combinaison avec remise est une disposition *non ordonnée* de p éléments, à choisir parmi n éléments discernables, avec répétition. Le nombre de combinaisons dans ce cas est :

$$C_{n+p-1}^{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!}$$

6.2 Arrangement *avec* répétition

Soit Ω un ensemble de n éléments. Un arrangement *avec répétitions* de ces n éléments pris **p** à la fois, est *toute disposition ordonnée* de **p** éléments distincts choisis dans Ω. Le nombre de ces dispositions ou le nombre d'arrangements de **p** éléments parmi n est : n^p.

Dans ce cas il est possible que : p > n

6.3 Permutation *avec répétition*

Soit Ω un ensemble de n éléments. On appelle permutation avec répétition de **p** éléments où *n* sont distincts, une disposition ordonnée de l'ensemble de ces p éléments où le premier figure p_1 fois, le second p_2 fois, etc., tel que $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = p$. Le nombre de permutations avec répétition ou avec remise est :

$$\frac{p!}{p_1!\,p_2!\ldots p_n!}$$

7. Exercices corrigés

Exercice 1

Soit l'expérience qui consiste à lancer une pièce de monnaie et 1 dé et à observer les côtés qu'ils présentent.

- *Déterminez Ω*
- *Quel est le nombre total d'événements élémentaires associés à cette expérience ?*

Solution

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (P,1),(P,2),(P,3),(P,4),(P,5),(P,6) \\ (F,1),(F,2),(F,3),(F,4),(F,5),(F,6) \end{Bmatrix}$$

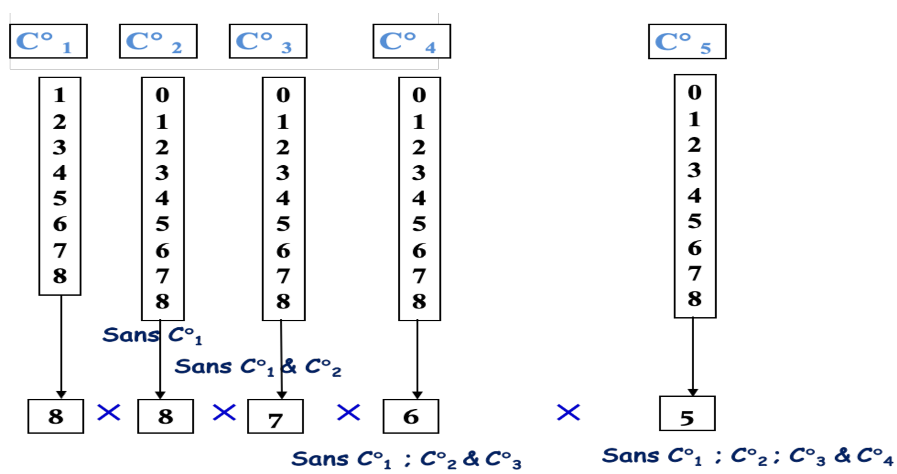
Le nombre total d'événements élémentaires associés à une expérience est de $\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2}$. Nous avons utilisé le principe de multiplication. Dans ce cas : $2 \times 6 = 12$.

Exercice 2

Combien peut-on former de nombres de 5 chiffres différents qui ne contiennent pas le chiffre 9 ?

On considère $C°_i$ le chiffre numéro i.

Solution

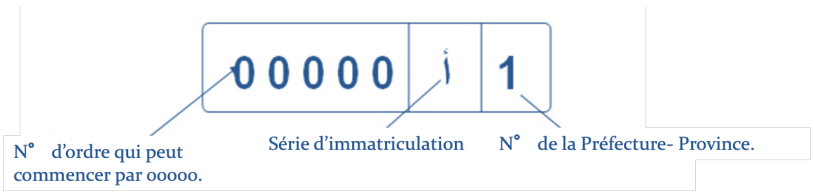


Nous obtenons ainsi 13440 chiffres différents.

Exercice 3

Combien de plaques d'immatriculation peut-on émettre au Maroc ?

Solution



Sachant que nous disposons de 28 séries d'immatriculation (*Lettre arabe*) et de 88 numéros pour les préfectures ou les provinces et avec le principe de multiplication nous aurons : 246 400 000 plaques d'immatriculation.

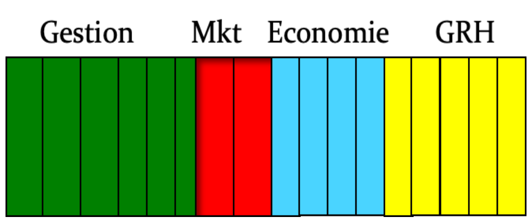
Exercice 4

On dispose de **6** livres de gestion, **2** livres de marketing, **4** livres d'économie et **5** livres de la GRH

Q*uel est le nombre de possibilités de ranger dans une bibliothèque les livres de gestion, de marketing, d'économie et de la GRH, sachant que les livres de chaque discipline doivent être placés ensemble ?*

Solution

Exemple d'un rangement :



$6! \times 2! \times 4! \times 5! \times 4! = 99\,532\,800$ possibilités.

$4!$: le nombre de permutations des disciplines.

Exercice 5

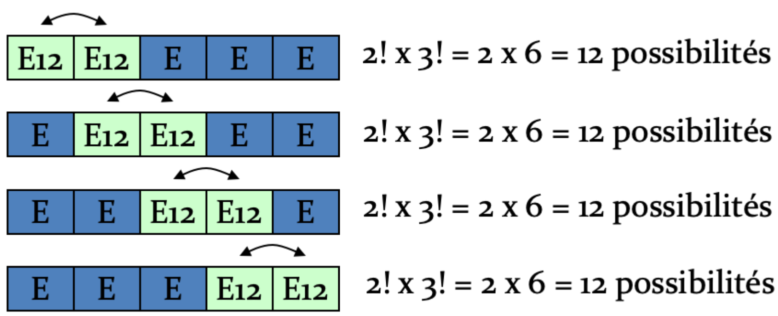
Dans une école on veut placer sur une rangée de cinq places les 5 premiers élèves.

Combien de possibilités peut-on avoir :

1. s'il n'y a pas de contrainte ?
2. si le 1^{er} et le $2^{ème}$ doivent être placés côte à côte ?
3. si le 1^{er} et le $2^{ème}$ ne doivent pas être placés côte à côte ?

Solution

1. 5! = 120 possibilités
2. Il y a quatre cas pour que les deux premiers soient l'un à côté de l'autre. Donc nous avons 48 possibilités (*Voir le schéma ci-dessous*).
3. 120 – 48 = 72 possibilités



Exercice 6

Dans une entreprise, 2 postes de responsabilité doivent être attribués et 5 personnes ont déposé leur candidature.

De combien de façons différentes peut-on attribuer ces 2 postes ?

Solution

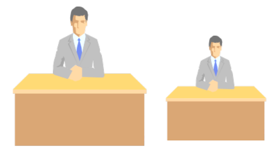
Pour occuper le poste de directeur, il y a 5 candidats

Pour occuper le poste de vice-directeur, il y a 4 candidats

Il existe 5 × 4 = 20 façons différentes d'attribuer les 2 postes de responsabilité.

$$5x4 = \frac{5!}{3!} = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$$

$$\frac{5!}{(5-2)!} = A_5^2$$



C’est donc un arrangement de 2 parmi 5.

Exercice 7

Soit un ensemble fondamental **Ω** = {**S**tatistique, **P**robabilités, **M**athématique, **M**anagement, **C**omptabilité}.

1) *Combien de dispositions ordonnées de 2 modules peut-on avoir ?*
2) *Combien de dispositions ordonnées de 3 modules peut-on avoir?*

Solution

Pour 2 modules :

$$A_5^2 = \frac{5!}{3!} = \frac{5x4 \times 3 \times 2x1}{3x2x1} = 20$$

Pour 3 modules :

$$A_5^3 = \frac{5!}{2!} = \frac{5x4 \times 3 \times 2x1}{2x1} = 60$$

Exercice 8

On dispose de trois médailles (Or, Argent, Bronze) pour 27 candidats dans une compétition internationale de gestion.

Combien de possibilités peut-on avoir pour attribuer ces médailles ? Sachant qu’un candidat ne peut avoir qu’une seule médaille.

Solution

$$A_{27}^3 = \frac{27!}{(27-3)!} = \frac{27 \times 26 \times 25 \times 24!}{24!}$$

Exercice 9

Dans une entreprise, on dispose de 13 femmes et 12 hommes. On veut former un comité exécutif de 3 membres pour remplir les postes de président, de vice-président et de secrétaire.

De combien de façons peut-on former ce comité ?

- *Si on ne dispose d'aucune contrainte !*
- *Si les postes de président et de secrétaire doivent être occupés par une femme et le poste de vice-président par un homme !*

Solution

- *Si on ne dispose d'aucune contrainte (13800) :*

$$A_{25}^{3} = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{25 \times 24 \times 23 \times 22!}{22!} = 13800$$

- *Si les postes de président et de secrétaire doivent être occupés par une femme et le poste de vice-président par un homme (1872) :*

$$A_{13}^{2} \times A_{12}^{1} = \frac{13!}{(11)!} \times \frac{12!}{(11)!} = 13 \times 12 \times 12$$

Exercice 10

On doit faire une sélection de 6 numéros parmi des nombres de 1 à 49.

Combien de possibilités peut-on avoir pour faire une sélection ?

Solution

$$C_{49}^{6} = \frac{49!}{6! \times (49-6)!}$$

$$C_{49}^{6} = \frac{49x48x47x46x45x44}{6!}$$

$$C_{49}^{6} = 13,983,816$$

Exercice 11

Dans une faculté, nous avons 10 économistes et 5 gestionnaires.

On doit former un comité composé de 2 économistes et de 3 gestionnaires.

Combien de comités différents peut-on former si :

- Tous les individus peuvent y participer.
- Un gestionnaire X doit absolument faire partie de ce comité.

Solution

- *Si tous les individus peuvent y participer (450 comités différents) soit :*

$$C_{10}^{2} \text{ x } C_{5}^{3}$$

- *Un gestionnaire X doit absolument faire partie de ce comité (270 comités différents) :*

$$C_{10}^{2} \text{ x } C_{4}^{2}$$

Exercice 12

Dans une faculté on veut constituer un groupe de 5 représentants des étudiants. Nous avons 15 étudiants dont 11 sont inscrits en SEG et 4 en Droit. *Quel est le nombre de groupes possibles si :*

- l'ordre de tirage a de l'importance.
- l'ordre n'a pas d'importance.
- on veut obtenir exactement 2 étudiants en droit et 3 en SEG (*l'ordre n'est pas important*).

Solution

- Lorsque l'ordre de tirage a de l'importance, le nombre de groupes possibles est de :

$$A_{15}^{5} = \frac{15!}{(15-5)!} = 360360$$

- Lorsque l'ordre de tirage n'a pas de l'importance, le nombre de groupes possibles est de :

$$C_{15}^{5} = \frac{A_{15}^{5}}{P_5} = \frac{15!}{5!(15-5)!} = 3003$$

- Le nombre de groupes comportant exactement 2 étudiants en droit et 3 en SEG (*Ordre n'est pas important*) est de 990 en utilisant :

$$C_4^2 x C_{11}^3 = \frac{4!}{2!(4-2)!} x \frac{11!}{3!(11-3)!}$$

Bonus ! La probabilité de tirer un groupe avec ces caractéristiques (2 Droit & 3 SEG) est égale à : 3003/990 = 0.33

Exercice 13

On considère une expérience qui consiste à tirer au hasard *3* boules dans une urne de 10. Ces boules sont de deux types : des boules *blanches* et des boules *noires*.

On dispose de 6 boules blanches et 4 boules noires.

On tire successivement 3 boules sans remise :

- *Quelle est la probabilité de tirer 3 boules blanches ?*
- *Quelle est la probabilité de tirer 3 boules noires ?*
- *Quelle est la probabilité de tirer au plus 2 boules blanches*

On tire simultanément 3 boules sans remise

- *Quelle est la probabilité de tirer 3 boules blanches ?*
- *Quelle est la probabilité de tirer 3 boules noires ?*

Solution

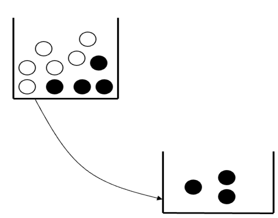
On tire successivement 3 boules sans remise :

La probabilité de tirer 3 boules blanches :

$$\frac{A_6^3}{A_{10}^3}$$

La probabilité de tirer 3 boules noires :

$$\frac{A_4^3}{A_{10}^3}$$



La probabilité de tirer au plus 2 boules blanches :

$$\frac{3A_6^2A_4^1 + 3A_6^1A_4^2 + A_4^3}{A_{10}^3}$$

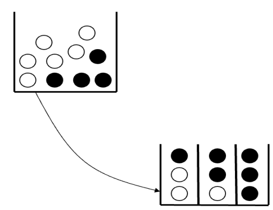
On tire simultanément 3 boules sans remise

La probabilité de tirer 3 boules blanches :

$$\frac{C_6^3}{C_{10}^3}$$

La probabilité de tirer au plus 2 boules blanches :

$$\frac{C_6^2C_4^1 + C_6^1C_4^2 + C_4^3}{C_{10}^3}$$



Exercice 14

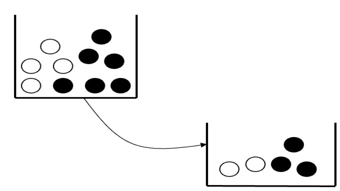
On considère une expérience qui consiste *à tirer au hasard 5* boules dans une urne de 10.

On dispose de 4 boules blanches et 6 boules noires.

Quelle est la probabilité de tirer 2 boules blanches sans remise ?

Quelle est la probabilité de tirer 2 boules blanches avec remise ?

Solution



Sans *remise* *simultanément*

$$\frac{C_4^2C_6^3}{C_{10}^5}$$

Nous allons voir par la suite que ça correspond à la loi Hypergéométrique.

Avec *remise*

$$C_5^2\left(\frac{4}{10}\right)^2\left(\frac{6}{10}\right)^3$$

Nous allons voir par la suite que ça correspond à la loi binomiale.

Exercice 15

Dans un amphi, nous avons n étudiants ($n \leq 365$), quelle est la probabilité de l'événement A « obtenir *au moins* deux étudiants qui ont *la même* date de naissance » ?

Solution

$$\mathrm{Card}(\Omega) = 365^n$$

Nous allons procéder avec l'événement complémentaire A^c.

A^c : chaque étudiant a une date de naissance différente de l'autre.

$$P(A^c) = \frac{\mathrm{Card}(A^c)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$$

$$P(A^c) = \frac{A_{365}^{n}}{365^n}$$

$$P(A^c) = \frac{365!}{(365-n)!365^n}$$

$$P(A^c) = \frac{365 \times 364 \times \ldots \times (365-(n-1))}{365^n}$$

$$P(A^c) = \frac{365 \times 364 \times \ldots \times (365-(n-1))}{365^n}$$

$$P(A) = 1 - \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \ldots . \times \frac{365-(n-1)}{365}$$

Nous pouvons démontrer facilement que :

- dès que $n > 23$, $P(A) > 0.50$
- dès que $n = 46$, $P(A) = 0.95$
- dès que $n = 55$, $P(A) = 0.99$

C'est le paradoxe des anniversaires ! C'est-à-dire en supposant que nous avons 60 étudiants, la probabilité d'avoir au moins deux étudiants qui ont la même date de naissance est de 99%.

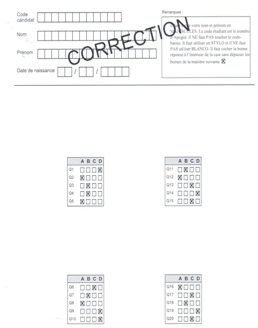
Exercice 16

Nous disposons d'un QCM, un examen avec des questions à choix multiples. Nous avons 20 questions.

Pour chaque question nous avons 5 choix.

L'étudiant doit choisir une seule réponse.

De combien de façons distinctes peut-il répondre à ce QCM ?



Solution

L'étudiant peut répondre de 5^{20} façons distinctes.

Bonus ! Si nous avons 20 questions et 4 choix, nous aurons : 4^{20}

Exercice 17

Anagramme avec répétition

On considère le mot « SUCCESS ». Quel est le nombre de mots possibles (avec ou sans signification) que l'on peut écrire en permutant ces 7 lettres ?

La même question pour le mot « BOOKKEEPER ».

Solution

Pour le mot « SUCCESS » :

$$7! / (3!\ 2!\ 1!\ 1!\ 1!)$$

Pour le mot « BOOKKEEPER » :

$$10! / (3!\ 2!\ 2!\ 1!\ 1!\ 1!)$$

Exercice 18

On choisit **3 lettres** à partir d'un alphabet à **5 lettres** différentes *avec remise (avec répétition).*

Solution

Dans ce cas nous utilisons la combinaison avec répétition. En appliquant la formule introduite dans le chapitre, nous aurons :

$$C_{5+3-1}^{3} = C_{7}^{3}$$

Pour la comprendre :

- On peut avoir 3 lettres différentes : C_5^3
- On peut avoir 3 lettres identiques : C_5^1
- On peut avoir. 2 lettres différentes et une qui se répète ! : $2C_5^2$

En utilisant les formules que nous avons déduites du triangle de Pascal nous obtenons C_7^3 comme illustré dans le schéma ci-dessous :

$$\underbrace{\underbrace{C_5^1 + C_5^2}_{C_6^2} + \underbrace{C_5^2 + C_5^3}_{C_6^3}}_{C_7^3}$$

Chapitre 4.

Probabilités conditionnelles et théorème de Bayes

Chapitre 4.
Probabilités conditionnelles et théorème de Bayes

Une probabilité affectée à un événement dépend de l'information disponible. Dans ce cas, on peut se poser la question suivante :

Comment doit-on modifier la probabilité que l'on attribue à un événement lorsqu'on dispose d'une information supplémentaire ?

Le concept de *probabilité conditionnelle* permet de répondre à cette question.

En effet, les informations supplémentaires peuvent modifier notre connaissance du problème étudié et par conséquent les probabilités associées aux événements de l'ensemble fondamental Ω.

Il est normalement possible de définir la probabilité d'un événement A sachant qu'on possède une certaine information représentée par un autre événement B, qu'on note[17] $A|B$. Cette probabilité conditionnelle peut être notée de la manière suivante : P_B (A) ou bien P (A|B).

1. Définition de la probabilité conditionnelle

Soit A un événement associé à une expérience aléatoire et B un événement de probabilité tel que $P(B)\neq 0$ associé à la même expérience aléatoire. La probabilité de réalisation de A lorsque B est réalisé est :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{4.1}$$

Cette probabilité est appelée *la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant B* ou la probabilité conditionnelle de l'événement A sous l'hypothèse B.

[17] On met en exergue que A|B ne désigne pas un événement différent de A. En notant P(A|B), on lui attribue une valeur numérique par la fonction d'ensembles P, sans aucune modification de l'événement A.

Lorsqu'on sait que l'événement B est réalisé, il est normal d'affecter à l'événement A un poids proportionnel à $P(A \cap B)$, ce qui justifie le choix du numérateur dans la définition (4.1).

On peut noter que le dénominateur $P(B) = P(\Omega \cap B)$ est une constante de normalisation, qui assure que $P(\Omega|B) = 1$. On peut aussi souligner que la définition (4.1) nécessite que $P(B)>0$ et qu'on ne peut pas prendre par exemple un événement impossible comme événement conditionnel.

2. Loi de multiplication

L'intérêt du concept de probabilité conditionnelle est qu'il est souvent plus facile d'attribuer une valeur à $P(A|B)$ en prenant en considération les conditions des expériences liées à B et d'en déduire par la suite la valeur de $P(A \cap B)$.

Loi de multiplication :

$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$ si $P(B) > 0$

En permutant le rôle de A et B, on a de même :

$P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A)$ si $P(A) > 0$

Cette loi découle directement de la formule (4.1). Il est important de souligner que le choix de l'une ou de l'autre formule dépend de *la succession des réalisations* de chaque événement.

En résumé, la notion de probabilité conditionnelle permet de prendre en compte l'information dont on dispose, à savoir qu'un événement B (*respectivement A*) est réalisé, pour actualiser la probabilité que l'on donne à un événement A (*respectivement B*).

3. Théorèmes des probabilités conditionnelles

3.1 Théorème des probabilités composées

En prenant en considération la loi de multiplication, on obtient :

$$\forall A \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{F}, \text{ tel que } P(A) > 0 \text{ et } P(B) > 0$$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \times P(B/A) \\ &= P(B) \times P(A/B) \end{aligned}$$

On peut étendre cette loi sur trois événements A, B et C *pouvant se réaliser dans cet ordre* et dans ce cas :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B/A) \times P(C/A \cap B)$$

Plus généralement :

Soit $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, où $n \geq 2$ une famille finie d'événements tel que :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$$

Nous avons ainsi :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n)$$
$$= P(A_1) \times P(A_2/A_1) \times P(A_3/A_1 \cap A_2) \times \ldots \times P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Cette formule est appelée *la formule des probabilités composées* ou *la règle des conditionnements successifs*.

On peut la démontrer tout simplement comme ceci :

$$P(A_1) \times P(A_2/A_1) \times P(A_3/A_1 \cap A_2) \times \ldots \times P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$
$$= P(A_1) \times \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \times \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \times \ldots \times \frac{P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)}{P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})}$$
$$= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n)$$

3.2 Théorème des probabilités totales

Dans certaines expériences aléatoires, on cherche parfois à évaluer la probabilité d'un événement A, qui peut être *très difficile* d'évaluer directement.

Cependant il peut être plus facile d'évaluer la probabilité de A *conditionnée par d'autres événements* A_i ; (i = 1, … , n) et dans ce cas, il est plus adéquat d'utiliser *la formule des probabilités totales*.

Définition

Soit $A_1, A_2, A_3, \dots A_n$, un groupe d'événements incompatibles deux à deux, qui forme une partition finie de Ω, tel que la réunion de ces événements forme cet ensemble fondamental (Ω).

Ceci dit, $A_1, A_2, A_3, \dots A_n$ forment un système complet d'événements.

Soit A un événement quelconque de $\mathcal{F}$, alors :

$$\forall A \in \mathcal{F},\ P(A) = \sum_{i=1}^{n} P\,(A|A_i)\,P(A_i)$$

Plus *généralement* on considère (A_i) ; $i \in \mathbb{N}$; un groupe d'événements qui forment une partition de Ω, tel que $\forall\ i \in \mathbb{N}, P(A_i) \neq 0$.

$$\forall A \in \mathcal{F},\ P(A) = \sum_{i=1}^{+\infty} P\,(A|A_i)P(A_i)$$

Remarque

Lorsqu'on a une partition de Ω en *n* hypothèses ou *n* cas possibles A_i et que l'on peut calculer les $P(A_i)$ et les P(A|Ai), on peut se poser le problème inverse et calculer P(Ai |A) à l'aide des probabilités précédentes en utilisant *le théorème de Bayes* explicité ci-dessous.

4. Théorème de Bayes

Le théorème de Bayes résulte de la définition de la probabilité conditionnelle, de la loi de multiplication et du théorème des probabilités totales.

Sachant que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}\ \ et\ \ P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

On obtient :

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Cette dernière formule est appelée *la règle de Bayes.*

Plus généralement :

Soit $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ un système complet d'événements, tel que P $(A_i) > 0$, $(i=1,\ldots,n)$ et A un événement quelconque de Ω de probabilité non nulle.

On suppose connaitre a priori les probabilités conditionnelles $P(A|A_i)$, ainsi que $P(A_i)$ pour $i=1,\ldots,n$. On peut déterminer a posteriori les probabilités $P(A_i|A)$, en utilisant le *théorème de Bayes* :

$$P(A_i|A) = \frac{P(A|A_i) \times P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|A_i) \times P(A_i)}$$

En *science de gestion*, l'objectif de l'utilisation du théorème de Bayes est de résoudre des problèmes de gestion qui feront appel à cette théorie, et de démontrer que cette résolution est riche en informations et peut apporter une valeur ajoutée au processus de prise de décisions.

5. Indépendance en probabilité

On considère deux événements A et B de probabilités *non nulles*. La probabilité conditionnelle P(A|B) utilise l'information supplémentaire selon laquelle l'événement B se réalise. Dans ce cas P (A|B) est normalement différente de P (A).

Ainsi, lorsque la réalisation de l'événement B ne modifie pas la probabilité de la réalisation de l'événement A, et par conséquent l'information fournie par la réalisation de B ne modifie en rien la probabilité de A, *alors B est indépendant de A*.

On note que *la relation d'indépendance est symétrique* et dans ce cas :

$$(5.1) \qquad P\,(A|B) = P\,(A)$$

Sachant que P (A) > 0, on a :

$$(5.2) \qquad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

En utilisant la loi de multiplication selon laquelle $P\,(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$, on remplace dans la formule (5.2) et on obtient :

$$P(B|A) = \frac{P(B) \times P(A|B)}{P(A)}$$

En prenant en considération la formule (5.1), on obtient :

$$(5.3) \qquad P\,(B|A) = P(B)$$

Ceci dit, B est indépendant de A et puisque la relation d'indépendance et symétrique A et B sont indépendants.

Définition :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. **A et B sont deux événements indépendants** de cet espace, si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Cette dernière formule est une *condition nécessaire et suffisante* pour que deux événements soient indépendants.

On peut noter que les trois égalités suivantes sont équivalentes :

- $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
- $P(A|B) = P(A)$
- $P(B|A) = P(B)$

Proposition :

Si A et B sont deux événements indépendants, alors il en est de même pour les événements :

- A et B^c ,
- A^c et B,
- A^c et B^c .

A^c et B^c sont les événements complémentaires de A et de B respectivement.

Remarques

- L'indépendance découle directement de la description de l'expérience aléatoire.
  Soit l'expérience qui consiste à lancer une pièce de monnaie *deux fois* et soit A l'événement « obtenir face au premier lancer » et B l'événement « obtenir face au second lancer ».
  Le fait d'obtenir face ou non, au premier lancer n'a pas d'influence sur le fait d'obtenir face ou non au second lancer. Ceci dit, A et B sont des événements indépendants.
- Notons que l'indépendance de plusieurs événements est un peu plus complexe à définir, elle est explicitée plus bas.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. A, B et C sont trois événements indépendants, si *chacun des événements est indépendant de la réalisation des deux autres*, conjointement ou séparément. On peut caractériser cette situation par les quatre conditions suivantes :

- $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
- $P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$
- $P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$
- $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$

Remarques

- Pour que trois événements soient indépendants, il ne suffit pas qu'ils soient deux à deux indépendants.
- La dernière formule : $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$ constitue la règle de multiplication de trois événements indépendants.

On peut généraliser le cas d'indépendance pour n événements :

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ sont indépendants si et seulement si :

$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times \ldots \times P(A_n)$.

$$\forall\, I \subset \{1, \ldots, n\}, P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

A noter !

- *Il n'est pas suffisant que $P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times \ldots \times P(A_n)$ pour que les événements soient indépendants.*
- *L'indépendance de n événements et une notion plus forte que l'indépendance deux à deux*[18].

Indépendance vs Incompatibilité

On considère A et B deux événements tel que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$. Si A et B sont incompatibles alors ils *ne sont jamais* indépendants.

On met ainsi en exergue que :

- L'indépendance signifie que la probabilité de la réalisation de l'événement A n'est pas modifiée par la réalisation de l'événement B et par conséquent :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \neq 0$$

[18] En statistique, on met en exergue une définition de l'indépendance de deux variables X et Y ; X et Y sont indépendantes si l'effectif conjoint n_{ij} dans le tableau de contingence est égale à :

$$n_{ij} = \frac{n_{i.} \times n_{.j}}{n_{..}}$$

Cette définition peut être aussi appliquée en probabilités, en utilisant la loi de Khi-deux, qui sera introduite dans le chapitre 6.

- L'incompatibilité signifie que les deux événements A et B ne peuvent pas se réaliser simultanément et par conséquent :

$$A \cap B = \varnothing \text{ , } P\,(A \cap B) = P\,(\varnothing) = 0.$$

6. Exercices corrigés

Exercice 1

On lance un dé. On considère les événements suivants :

- ◊ A « Obtenir un nombre impair »
- ◊ B « le résultat du lancement du dé < 6 »
- ◊ C « Obtenir un nombre pair »

Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre impair sachant qu'il est < 6 ?

Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair sachant qu'il est < 6 ?

Solution

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Card $(\Omega) = 6$

La probabilité d'obtenir un nombre impair sachant qu'il est < 6 :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3/6}{5/6} = \frac{3}{5}$$

La probabilité d'obtenir un nombre pair sachant qu'il est < 6 :

$$P(C \mid B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{2/6}{5/6} = \frac{2}{5}$$

Exercice 2

Une machine est composée de 2 composants A et B qui peuvent être en panne

- La probabilité d'une panne du composant A : 0.20
- La probabilité d'une panne du composant B si A est en panne : 0.80
- La probabilité d'une panne du composant B si A *n'est pas* en panne : 0.40

Quelle est la probabilité d'une panne du composant B ?

Solution

On considère les événements suivants :

A : « le composant A est en panne » & B : « le composant B est en panne ».

Dans ce sens nous avons :

$P(A) = 0.2$

$P(B|A) = 0.8$,

$P(B|A^c) = 0.4$

La probabilité d'une panne du composant B :

$$P(B)= P(A\cap B) + P(A^c\cap B) = (P(B|A)\ P(A)) + (P(B|A^c)\ P(A^c))$$
$$= (0.8 \times 0.2) + (0.4 \times 0.8)$$
$$= 0.48$$

Exercice 3

Une machine est composée de 2 composants A et B qui peuvent être en panne.

- La probabilité que le composant B n'est pas en panne : 0.70
- La probabilité d'une panne du composant A si B est en panne : 0.40
- La probabilité d'une panne du composant A si B n'est pas en panne : 0.50

Quelle est la probabilité d'une panne du composant A ?

Quelle est la probabilité d'une panne du composant A & B, une panne de la machine ?!

Quelle est la probabilité d'une panne du composant B si A est en panne ?

Solution

On considère les événements suivants :

A : « le composant A est en panne » & B : « le composant B est en panne »

Dans ce sens nous avons :

$P(B) = 0.3$

$P(B^c) = 0.7$

$P(A|B) = 0.4$

$P(A|B^c) = 0.5$

- La probabilité d'une panne du composant A

$P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap B^c)$

$= (P(A|B) \times P(B)) + (P(A|B^c) \times P(B^c))$

$= (0.4 \times 0.3) + (0.5 \times 0.7)$

$= 0.47$

- La probabilité d'une panne du composant A & *B ;* $P(A\cap B)$*:*

$P(A\cap B) = (P(A|B) \times P(B) = 0.4 \times 0.3 = 0.12$

- La probabilité d'une panne du composant B si A est en panne ; $P(B|A)$:

$P(A\cap B) = (P(A|B) \times P(B)$

$P(A\cap B) = 0.4 \times 0.3 = 0.12$

$P(B|A) = P(A\cap B) \div P(A) = 0.12 \div 0.47 = 0.26$

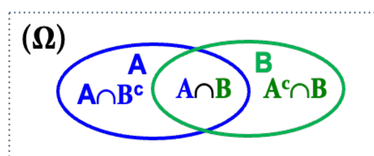
- La probabilité d'une panne du composant *B* si A est *n'est pas* en panne :

$P(B|A^c) = P(A^c\cap B) \div P(A^c)$

$= ((P(B) - P(A\cap B)) \div P(A^c)$

$= 0.18 \div 0.53$

$= 0.34$



Exercice 4

On dispose de 4 amphithéâtres, 2 dans un nouveau bâtiment et 2 dans les anciens bâtiments. On choisit l'un d'entre eux au hasard, puis on répète l'expérience une fois en prenant en considération les 3 qui restent.

Quelle est la probabilité que les 2 amphithéâtres soient du NB ?

Solution

On considère les événements suivants :

A « le premier amphi choisi est du nouveau bâtiment »

B « le deuxième amphi choisi est du nouveau bâtiment »

La probabilité que les 2 amphithéâtres soient du nouveau bâtiment :

$P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A) = 1/6$

En prenant en considération :

$$\frac{C_2^1}{C_4^1} \times \frac{C_1^1}{C_3^1}$$

Exercice 5

On dispose de 6 amphithéâtres, 4 dans un nouveau bâtiment et 2 dans les anciens bâtiments. On choisit l'un d'entre eux au hasard, puis on répète l'expérience deux fois en prenant en considération les 5 qui restent, puis les 4 qui restent.

Quelle est la probabilité que les 3 amphithéâtres soient du nouveau bâtiment ?

Solution :

On considère A_i « le $i^{\text{ème}}$ amphi choisi est du NB ».

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_2/A_1) \times P(A_3/A_1 \cap A_2) = 1/5$ et ceci en prenant en considération :

$$\frac{C_4^1}{C_6^1} \times \frac{C_3^1}{C_5^1} \times \frac{C_2^1}{C_4^1}$$

Exercice 6

Dans une faculté, la proportion d'étudiants en S_2 en prenant en considération les sections A, B, C et D et comme suit :

- S_2A - 60%, dont 10% ont validé S_1
- S_2B - 10%, dont 50% ont validé S_1
- S_2C - 25%, dont 20% ont validé S_1
- S_2D - 5%, dont 60% ont validé S_1

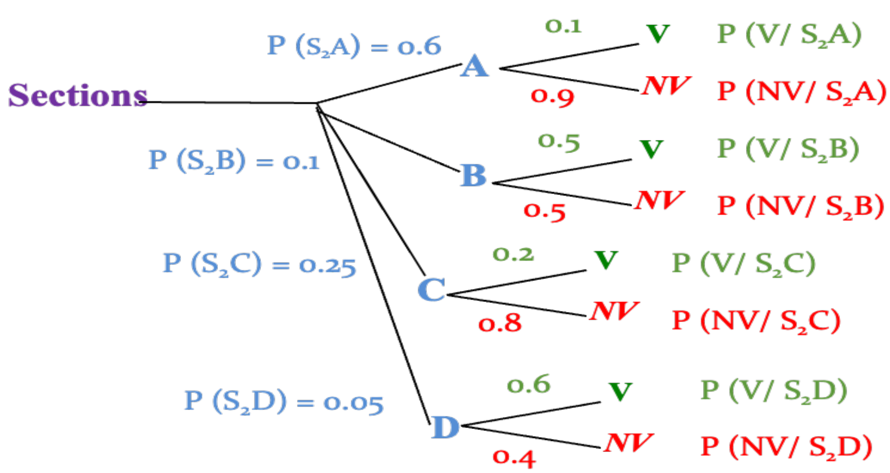
Quelle est la probabilité qu'un étudiant choisi au hasard ait validé S_1 ?

Solution

On considère V un événement tel que l'étudiant ait validé S_1, dans ce cas :

$$
\begin{aligned}
P(V) = {} & [P(S_{2A}) \times P(V/S_{2A})] \\
& + [P(S_{2B}) \times P(V/S_{2B})] \\
& + [P(S_{2C}) \times P(V/S_{2C})] \\
& + [P(S_{2D}) \times P(V/S_{2D})] \\
= {} & (0.1 \times 0.6) + (0.5 \times 0.1) + (0.2 \times 0.25) + (0.6 \times 0.05) \\
= {} & 0.19
\end{aligned}
$$

Nous pouvons aussi utiliser l'arbre de probabilités pour comprendre l'enchainement de P(V), comme ci-dessous :



Cet arbre de probabilités peut être utilisé pour résoudre les autres exercices, avec la même logique.

Exercice 7

Un professeur corrige les copies d'un examen. On dispose de 1/4 de garçons (G) dont 40% remettent toujours les copies vides (V). Pour les filles (F), 30% remettent toujours les copies vides. Il choisit une copie au hasard.

Quelle est la probabilité que la copie soit vide ?

On suppose que les noms des étudiants sont cachés ! On choisit une copie au hasard, elle est vide.

Quelle est la probabilité qu'elle soit remise par une fille ?

Solution

Nous avons selon les énoncées :

$P(F) = 3/4$

$P(G) = 1/4$

$P(V|F) = 3/10$

$P\ (V/G) = 4/10$

La probabilité qu'une copie choisie au hasard soit vide :

$$P(V) = (P(F) \times P(V|F)) + (P(G) \times P(V|G))$$
$$= (3/4 \times 3/10\ ) + (1/4 \times 4/10\ )$$
$$= 13/40$$
$$= 0.325$$

On suppose que les noms des étudiants sont cachés !

On choisit une copie au hasard, elle est vide. La probabilité qu'elle soit remise par une fille :

$$P(F \mid V) = \frac{P(F) \times P(V / F)}{P(V)}$$

$$P(F \mid V) = \frac{(3/4) \times (3/10)}{(13/40)}$$

$$P(F/V) = 9/13$$

Exercice 8

Un professeur corrige les copies d'un examen. Parmi ses étudiants 2/5 sont des garçons (G) dont 40% remettent toujours les copies vides. Pour les filles (F) 20% remettent toujours les copies vides.

- Il choisit une copie au hasard. *Quelle est la probabilité qu'elle soit vide (V)* ?
- Il choisit une copie au hasard. *Quelle est la probabilité qu'elle ne soit pas vide* ?
- Supposant que les étudiants n'ont pas indiqué leur nom. Le professeur choisit une copie au hasard, elle est vide. *Quelle est la probabilité qu'elle soit remise par un garçon* ?

Solution

Nous prenons en considération les probabilités suivantes :

$P(G) = 2/5$

$P(F) = 3/5$

$P(V|G) = 4/10$

$P\ (V/F) = 2/10$

Le professeur choisit une copie au hasard, la probabilité qu'elle soit vide :

$$\begin{aligned} P(V) &= (P(G) \times P(V|G)) + (P(F) \times P(V|F)) \\ &= (2/5 \times 4/10) + (3/5 \times 2/10) \\ &= 8/50 + 6/50 \\ &= 7/25 \\ &= 0.28. \end{aligned}$$

La probabilité qu'elle ne soit pas vide est 1 - 0.28 = 0.72.

Supposant que les étudiants n'ont pas indiqué leur nom. Le professeur choisit une copie au hasard, elle est vide.

La probabilité qu'elle soit remise par un garçon :

$$P(G\,|\,V) = \frac{P(G) \times P(V/G)}{P(V)}$$

$$P(G|V) = (2/5 \times 4/10) / (7/25)$$
$$= 4/7$$
$$= 0.5714$$

Exercice 9

Un professeur a corrigé les copies d'un examen. Parmi ses étudiants 55% sont des filles dont 30% remettent toujours les copies vides. Pour les garçons, 35% remettent toujours les copies vides (V).

- Il choisit une copie au hasard. *Quelle est la probabilité qu'elle ne soit pas vide* ?
- Supposant que les étudiants n'ont pas indiqué leur nom. Le professeur choisit une copie au hasard, elle est vide. *Quelle est la probabilité qu'elle soit remise par un garçon ?*

Solution

Nous disposons des probabilités suivantes :

$P(G) = 0.45$

$P(F) = 0.55$

$P(V|G) = 0.35$

$P(V|F) = 0.30$

- Il choisit une copie au hasard, la probabilité qu'elle ne soit pas vide (NV) :

$P(NV|G) = 0.65$

$P(NV|F) = 0.70$

$$P(NV) = (P(G) \times P(NV|G)) + (P(F) \times P(NV|F))$$
$$= (0.45 \times 0.65) + (0.55 \times 0.70)$$
$$= 0.6775.$$

- Supposant que les étudiants n'ont pas indiqué leur nom. Le professeur choisit une copie au hasard, elle est vide. Quelle est la probabilité qu'elle soit remise par un garçon ?

Sachant que :

$$P(G \mid V) = \frac{P(G) \times P(V / G)}{P(V)}$$

& P(V) = 1 - P(NV)

= 1 - 0.6775

= 0.3225

P(G|V) = (0.45 × 0.35) / 0.3225

= 0.4884

Exercice 10

Application du théorème de Bayes

Nous disposons de 4 machines : M1, M2, M3, M4 qui produisent respectivement 500, 1000, 1500, 2000 pièces/jour.

De cette production 5%, 6% , 7% , 10% sont défectueuses (D)

On prend au hasard une pièce, elle est défectueuse (D)!

- *Quelle est la probabilité qu'elle ait été produite par la machine M3 ?*

Solution

Sachant que :

$$P(M_3 / D) = \frac{P(M_3) \times P(D \mid M_3)}{\sum_{i=1}^{4} P(M_i) . P(D \mid M_i)}$$

Nous avons ainsi :

$$P(M_3 / D) = \frac{0.3 \times 0.07}{(0.1 \times 0.05) + (0.2 \times 0.06) + (0.3 \times 0.07) + (0.4 \times 0.1)}$$

Bonus ! On prend au hasard une pièce et on la trouve bonne (B)! La probabilité qu'elle ait été produite par la machine M3 :

$$P(M_3 / B) = \frac{P(M_3) \times P(B \mid M_3)}{\sum_{i=1}^{4} P(M_i) \,.\, P(B \mid M_i)}$$

$$P(M_3 / B) = \frac{0.3 \times 0.93}{(0.1 \times 0.95) + (0.2 \times 0.94) + (0.3 \times 0.93) + (0.4 \times 0.9)}$$

Exercice 11

Une usine dispose de deux machines M**1** et M**2** qui produisent respectivement 5000 et 15000 ampoules/mois.

De cette production, 5% et 10% des ampoules sont *défectueuses* et proviennent respectivement de la machine M**1** et M**2**.

- Un contrôleur de la qualité prend au hasard une ampoule et la trouve non défectueuse (ND). *Quelle est la probabilité qu'elle ait été produite par la machine M1 ?*

Solution

Sachant que :

$$P(M1 / ND) = \frac{P(M_1) \times P(ND \mid M_1)}{\sum_{i=1}^{2} P(M_i) \times P(ND \mid M_i)}$$

P(M1/ND) = (0.25 × 0.95) / ((0.25 × 0.95) + (0.75 × 0.90))

P(M1/ND) = 0.2603

Exercice 12

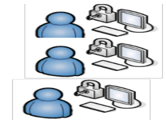
Un fabricant d'ordinateurs fait appel à trois fournisseurs F1, F2, F3 qui fournissent respectivement 10%, 20% et 70% des pièces.

La qualité des pièces varie d'un fournisseur à un autre.

La proportion des pièces défectueuses (D) est de 5%, 15%, 20% respectivement.

Lors du contrôle de la qualité, on choisit au hasard une pièce, elle est bonne (B)!

Quelle est la probabilité qu'elle ait été livrée par F3 ?



Solution

En appliquant le théorème de Bayes, la probabilité qu'elle ait été livrée par F3 :

$$P(F_3 / B) = \frac{0.7 \times 0.8}{(0.1 \times 0.95) + (0.2 \times 0.85) + (0.7 \times 0.8)}$$

Exercice 13

Dans une entreprise, on dispose de 3 machines M1, M2, M3 qui produisent respectivement 1000, 2000, 3000 clés USB/jour. De cette production, 7%, 8%, 10% sont *défectueuses* (D) et proviennent respectivement de la machine M1, M2 et M3.

- Un gestionnaire de qualité prend au hasard une pièce et la trouve défectueuse. *Quelle est la probabilité qu'elle ait été produite par la machine M2 ?*

Solution

En appliquant le théorème de Bayes, la probabilité qu'elle ait été produite par la machine M2 :

$$P(M2 / D) = \frac{P(M_2) \times P(D \mid M_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(M_i)\,.\,P(D \mid M_i)}$$

$P(M_2/D) = (2/6 \text{ x } 0.08) / ((1/6 \text{ x } 0.07) + (2/6 \text{ x } 0.08) + (3/6 \text{ x } 0.1))$

$P(M_2/D) = 0.3018$

Exercice 14

Un groupe d'étudiants est constitué de 40% de filles et 60% de garçons. 25% des garçons utilisent ChatGPT contre 10% des filles.

Quelle est la probabilité qu'un étudiant choisi au hasard n'utilise pas ChatGPT?

NU : l'étudiant choisi au hasard n'utilise pas ChatGPT

Solution

La probabilité qu'un étudiant choisi au hasard n'utilise pas ChatGPT :

P(NU) = (P(Fille) x P(NU/Fille)) + (P(Garçon) x P(NU/Garçon))

= (0.4 x 0.9) + (0.6 x 0.75)

= 0.7175

Exercice 15

Un responsable d'un magasin a noté que 25% des clients payent leurs achats par carte de crédit.

Quelle est la probabilité que deux clients utilisent chacun sa carte de crédit ?

Solution

On considère les événements suivants :

A « le *premier* client utilise sa carte de crédit »

B « le *deuxième* client utilise sa carte de crédit »

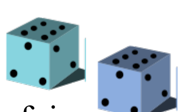
Dans ce cas la probabilité que deux clients utilisent chacun sa carte de crédit :

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$= 0.25 \times 0.25$

$= 0.0625$

Exercice 16



On lance un dé deux fois.

On considère les événements suivants :

A « le premier nombre qui apparait = 5 »

B « la somme des deux nombres obtenus = 7 »

C « la somme des deux nombres obtenus = 7 ou 10 »

Calculez $P(A|B)$

Calculez $P(B|C)$

A et B sont-ils indépendants ?

Solution

Nous avons :

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3)\ldots,(6,6)\}$$

$$\text{Card}(\Omega) = 36$$

La probabilité P(A|B) est égale à :

$$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$$
$$= (1/36) / (6/36)$$
$$= 1/6$$

La probabilité P(B|C) est égale à :

$$P(B/C) = P(B \cap C) / P(C)$$
$$= (6/36) / (9/36)$$
$$= 6/9$$
$$= 2/3$$

A et B sont indépendants puisque :

$P(A/B) = 1/6$

$P(A) = 6/36 = 1/6$

Dans ce cas : $P(A/B) = P(A)$

Encore plus $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Exercice 17

On suppose que nous disposons de 400 étudiants répartis selon le genre et leur opinion, pour ou contre une nouvelle réforme.

Répartition des étudiants selon le genre et leur opinion

Genre | Opinion	Pour	Contre	Total
Homme	175	75	250
Femme	65	85	150
Total	240	160	400

Source : exemple

- *Quelle est la probabilité qu'un étudiant choisi au hasard soit contre la réforme ?*
- *Quelle est la probabilité qu'un étudiant choisi au hasard soit un homme ?*
- *Sachant que l'étudiant est un homme, quelle est la probabilité qu'il soit pour la réforme ?*
- *Calculez les probabilités marginales*
- *Calculez les probabilités conjointes*

Solution

- La probabilité qu'un étudiant choisi au hasard soit contre la réforme :

P(A) = 160/400

- La probabilité qu'un étudiant choisi au hasard soit un homme :

P(B) = 250/400

- Sachant que l'étudiant est un homme, la probabilité qu'il soit pour la réforme :

P(C) = 175/250

P (C) = (175/400) /(250/400) = 0.70

- Les probabilités marginales sont dans le tableau ci-dessous :

Genre | Opinion	Pour	Contre	Total
Homme			0.625
Femme			0.375
Total	0.6000	0.4000	1.000

- Les probabilités conjointes sont dans le tableau ci-dessous :

Genre | Opinion	Pour	Contre	Total
Homme	0.4375	0.1875	0.625
Femme	0.1625	0.2125	0.375
Total	0.6000	0.4000	1.000

NB. Pour savoir si les deux variables sont indépendantes, nous pouvons calculer les n_{ij} et utiliser par la suite la loi de Khi-deux qui sera introduite dans le chapitre 6.

Chapitre 5.

Variables aléatoires

1. Introduction
2. Définition d’une variable aléatoire
3. Typologie d’une variable aléatoire
4. Loi de probabilité discrète
5. Loi de probabilité continue
6. Indépendance des variables aléatoires
7. Exercice corrigé

Chapitre 5.
Variables aléatoires

La notion de variable aléatoire est fondamentale dans le calcul des probabilités. Dans ce chapitre on définira les variables aléatoires discrètes et continues et on présentera leurs caractéristiques essentielles et les moments, à savoir, l'espérance mathématique et la variance.

1. Introduction

On peut associer à une expérience aléatoire un ensemble fondamental Ω qui contient les résultats possibles, d'où on peut construire des événements. Mais souvent, on ne s'intéresse pas seulement aux résultats de l'expérience, mais aussi à certaines de ces *conséquences*.

On considère *dans un premier temps, le cas où Ω est un ensemble fini* et on suppose pour chaque événement élémentaire ou singleton $\omega \in \Omega$, on peut établir une règle qui lui associe une valeur réelle x.
Cette règle d'association, ou *fonction* définie sur Ω, va nous permettre d'introduire le concept de variable aléatoire[19], qu'on désigne par **X**.

2. Définition d'une variable aléatoire

L'association entre un événement élémentaire ω et une valeur x se traduit par la relation $x = X(\omega)$. On note que x est la valeur prise par la variable aléatoire X ; lorsque le résultat de l'expérience aléatoire est ω.
Puisque Ω est supposé fini, la variable aléatoire X prend un nombre fini de valeurs et dans ce cas elle représente *une variable discrète.*

[19] Une variable X est *aléatoire* lorsqu'on ne connait pas sa valeur à l'avance. Par exemple, avant de procéder à une expérience aléatoire qui consiste au tirage *au hasard* d'un individu dans une population, on ne peut pas savoir quel sera l'âge de cet individu.

On peut noter que plusieurs éléments de Ω peuvent être associés à une même valeur de X. On note E_x l'événement composé des résultats associés à la valeur $x \in \mathscr{V}$, tel que $\mathscr{V}$ représente *l'ensemble des valeurs possibles* de la fonction X : $E_x \{\omega \in \Omega \mid X(\omega)=x\}$.

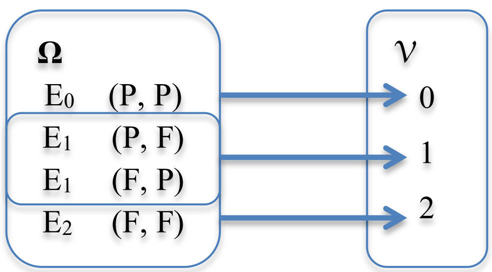
La variable aléatoire X associe ainsi à l'événement E_x la valeur x. L'ensemble des valeurs possibles $\mathscr{V}$ *peut* aussi être noté $X(\Omega)$.

Exemple 5.1

On lance une pièce de monnaie deux fois, l'univers des possibles est :

$$\Omega : \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}.$$

On s'intéresse au nombre de « face » obtenue. On associe ainsi à chacun des résultats ou issues possibles un nombre entier variant de 0, 1 ou 2.



Suite à cette définition, nous pouvons déterminer l'ensemble $\mathscr{V}$ des valeurs possibles de la fonction X, par contre on ne peut pas prédire une valeur particulière x attribuée à X, avant de réaliser l'expérience aléatoire, puisque cette valeur dépend du résultat ω de l'expérience. Néanmoins, on peut associer à chaque valeur possible de X, la probabilité que X prenne effectivement cette valeur.

Définition

Une variable aléatoire est une application de Ω dans un ensemble qui peut être l'ensemble des réels positifs, ou celui des entiers naturels ou encore dans tout autre ensemble, et qui associe à chaque événement élémentaire de l'univers des possibles une valeur[20]. Les valeurs que peut prendre cette variable aléatoire s'appellent des réalisations.

3. Typologie d'une variable aléatoire

A partir d'ensembles fondamentaux Ω infinis, on peut distinguer le cas des variables aléatoires discrètes et continues.

Dans le cas des variables aléatoires *discrètes,* $\mathscr{V}$ est souvent égal à $\mathbb{N}$ *ou* $\mathbb{Z}^2$ et dans le cas des variables aléatoires *continues*, $\mathscr{V}$e st souvent égal à $\mathbb{R}$.

Variable aléatoire discrète

Une variable aléatoire discrète est une application X : Ω ➔ $\mathscr{V}$ où $\mathscr{V}$ est un ensemble dénombrable.

Pour $x \in \mathscr{V}$, on peut noter de façon concise {X= ω} l'événement $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$.

Variable aléatoire continue

Une variable aléatoire continue est une application X : Ω ➔ $\mathscr{V}$ où $\mathscr{V}$ est un ensemble non dénombrable infini. Dans ce cas, X peut prendre ses valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans l'un de ses intervalles.

Nous mettons en exergue que la terminologie pour la classification des variables aléatoires est *la même* que celle en usage pour les variables statistiques, sauf que la différence de définition porte sur l'ensemble observé pour déterminer le type de variable :

- Pour une *variable statistique*, ce sont les caractéristiques de l'ensemble des *modalités* qui déterminent son type.
- Pour une *variable aléatoire*, ce sont les caractéristiques de l'ensemble des *réalisations* qui déterminent son type.

[20] On peut souligner que X est une variable aléatoire et non pas une variable statistique, car entre autres raisons, son ensemble de départ *n'est pas une population* mais *un univers des possibles*.

4. Loi de probabilité discrète

Probabilité associée à la valeur d'une variable

Pour chaque événement E, on peut définir une probabilité notée P(E). Comme chaque valeur $x \in \mathcal{V}$ est associée à un événement E_x, on peut doter x d'une probabilité égale à $P(E_x)$, qu'on note aussi p_x ou $P(X=x)$.

En prenant en considération l'exemple (5.1), les événements E_0, E_1, E_2 associés aux valeurs $x=0$, $x=1$, $x=2$ ont pour probabilités respectives : P $(E_0)=1/4$; P $(E_1)=2/4$; $(E_2)=1/4$ ou bien $P(X=0) = 1/4$; $P(X=1) = 1/2$; $P(X=2) = 1/4$.

On peut noter que $p_x \geq 0$ pour $x=0$, $x=1$, $x=2$ et $p_0 + p_1 + p_2 = 1$; sachant que E_0, E_1, E_2 constituent une partition de Ω ou un système complet d'événements.

Définition

Une loi de probabilité ou une distribution de probabilité caractérise une variable aléatoire en indiquant, toutes les valeurs possibles de X et leur probabilité. Elle est ainsi définie par l'ensemble des couples $\{(x, p_x), x \in \mathcal{V}\}$.

Soit le couple (x, p_x) associant à des valeurs réelles x des nombres p_x et $\mathcal{V}$ un ensemble des valeurs x considérées, l'ensemble $\{(x, p_x), x \in \mathcal{V}\}$, *constitue une loi de probabilité si et seulement si :*

$$p_x \geq 0, \quad x \in \mathcal{V}$$

$$et \sum_{x \in \mathcal{V}} p_x = 1$$

Dans ce cas, on peut définir $\mathcal{V}=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ en associant à chaque valeur x_i une probabilité désignée par p_i ou $P(X = x_i)$.

Famille de Lois de probabilité

Dans l'exemple (5.1), la loi de probabilité est spécifiée dans la mesure où on suppose qu'on est face à une situation d'équiprobabilité et que les deux pièces sont équilibrées.

On reprend le même exemple et on suppose cette fois-ci qu'on ignore si la pièce est équilibrée ou non. Ceci dit, on ne peut pas affirmer a priori l'équiprobabilité des deux événements.

Dans ce cas on suppose que P(face) = π, et par conséquent P(pile) = $1-\pi$ tel que π est un paramètre inconnu $\in [0,1]$.

On considère *le nombre de faces obtenu à la fin de l'expérience*, qui peut être toujours égal à 0, 1 ou 2. La différence par rapport au cas précédent est que les probabilités qui leur sont associées en utilisant les lois fondamentales de la théorie des probabilités sont égales à :

- $p_0 = P(X=0) = (1-\pi)(1-\pi) = (1-\pi)^2$;
- $p_1 = P(X=1) = \pi\,(1-\pi) + (1-\pi)\,\pi = 2\pi\,(1-\pi)$;
- $p_2 = P(X=2) = \pi^2$

La loi de probabilité $\{(0, p_0), (1, p_1), (2, p_2)\}$ dépend donc du paramètre π. Ainsi, toutes les lois correspondantes aux différentes valeurs possibles de π sont définies par les expressions p_0, p_1 et p_2, et constituent *une famille de distributions de probabilités* ou *une famille de lois de probabilités.*

Définition

Si les probabilités p_x associées aux valeurs x d'une variable aléatoire X dépendent d'un paramètre π, les lois qui correspondent aux différentes valeurs possibles de π sont définies par p_0, p_1 et p_2 et constituent *une famille de lois de probabilité* notée :

$$P(X = x) = p_x(\pi) \,/\, x \in \mathcal{V}$$

Fonction de répartition

La fonction associant à une valeur réelle x quelconque la probabilité pour que la variable aléatoire X prenne une valeur inférieure ou égale à x est appelée *fonction de répartition,* qu'on note :

$$F(x) = P(X \leq x)$$

On reprend l'exemple (5.1) avec la loi de probabilité qui correspond au nombre de faces dans le cas d'équiprobabilité : {(0, 1/4) ; (1, 1/2) ; (2, 1/4)}.

Par définition la fonction de répartition :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/4 & 0 \leq x < 1 \\ 3/4 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

De façon générale, la fonction de répartition d'une loi de probabilité est définie par la fonction $F(x) = \sum_{x_j \leq x} p_j$ [21]

ou encore :

$$F(x) = P(X \leq x) \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ \dots & \\ p_1 + \dots + p_j & x_j \leq x < x_{j+1} \\ \dots & \\ p_1 + \dots + p_n & x \geq x_n \end{cases}$$

La connaissance de $p_1,\dots,p_n$ permet de construire une fonction de répartition F(x) qui permettra de définir la distribution ou la loi de probabilité. Inversement, si on connait F(x) pour toutes les valeurs possibles x de X, nous pouvons retrouver les probabilités $p_1, \dots, p_n$, à partir de F(x) tel que :

$$p_1 = F(x_1) \; ; \dots ; \; p_j = F(x_j) - F(x_{j-1}) \; ; \dots ; \; p_n = 1 - F(x_{n-1})$$

F(x) permet ainsi de définir la distribution de probabilité.

[21] On peut représenter graphiquement cette fonction par une courbe en escalier qu'on appelle la *courbe de répartition,* dont la construction est semblable à celle de la courbe cumulative en statistique.

Paramètres d'une loi de probabilité

En statistique, on peut résumer l'information par l'intermédiaire des indicateurs de tendance centrale et de position, des indicateurs de dispersion, des indicateurs de concentration ou même de forme. En probabilités aussi, nous pouvons utiliser plusieurs indicateurs.

Dans cette section, nous aborderons deux indicateurs importants, à savoir, un indicateur de tendance centrale « *la moyenne* » et un indicateur de dispersion « *la variance* ».

Espérance mathématique

Le premier indicateur qu'on peut introduire est la moyenne arithmétique avec sa formule :

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{n} f_j x_j$$

Par l'analogie « *fréquence-probabilité* » on peut introduire la *moyenne d'une loi de probabilité* désignée sous le nom d'*espérance mathématique* de X notée µ et définie par l'expression :

$$\mu = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

Ou simplement :

$$\mu = \sum_{x \in V} p_x x$$

Variance

On peut de même introduire la variance d'une loi de probabilité par analogie « *fréquence-probabilité* », qui est définie par l'expression :

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^{n} p_j (x_j - \mu)^2$$

Ou simplement :

$$\sigma^2 = \sum_{x \in V} p_x (x - \mu)^2$$

Expression générale

Dans le cas général d'une loi de probabilité discrète $\{(x, p_x), x \in \mathcal{V}\}$ d'une variable aléatoire, si g(X) est une fonction réelle quelconque de X tel que pour chaque valeur x de X on associe un nombre réel défini par g(x), l'espérance mathématique de g(X) est notée E [g(X)] et elle est définie par :

$$E[g(X)] = \sum_{x \in V} p_x g(x)$$

Si g(X) =X, on obtient :

$$E[X] = \sum_{x \in V} p_x x = \mu$$

Si g(X) = $(X - \mu)^2$, on obtient :

$$E[(X - \mu)^2] = \sum_{x \in V} p_x (x - \mu)^2 = \sigma^2$$

Propriétés de l'espérance mathématique et de la variance

L'espérance mathématique est un outil très utilisé. L'une des raisons de cet usage est liée à ses nombreuses propriétés, dont on présente ci-dessous celles qui sont les plus utiles. Elles concernent essentiellement la moyenne (μ ou E(X)) et on inclura aussi celles qui concernent la variance (σ^2 ou V(X)).

Propriétés de l'espérance mathématique

Propriété.1 : Si « b » est un nombre réel quelconque : E(b) = b

Propriété.2 : Si « a » est un nombre réel quelconque : E(aX) = a × E(X)

Ceci dit, si toutes les valeurs d'une variable aléatoire sont multipliées par une constante, la moyenne μ = E(X) de sa distribution de probabilité le sera aussi. De même si on divise par une constante.

Propriété 3 : Si « b » est une valeur réelle quelconque : E(X+b) = E(X) + b

Ceci dit, ajouter une constante « b » aux valeurs de X implique que la moyenne μ est aussi augmentée de cette valeur.

Propriété 4 : L'étude de la variable *aléatoire centrée* Y = X - μ où E(X) = μ est un cas particulier tel que b = -μ. Ceci dit, E(X- μ) = E(X) - μ = μ - μ = 0.

On peut ainsi noter *qu'une variable aléatoire centrée* possède toujours une distribution de probabilité de moyenne nulle.

Propriétés de la variance

Propriété 1 : Si a est une valeur réelle quelconque : $V(aX) = a^2\, V(X)$.

Propriété 2 : Une variable aléatoire X possède une variance égale à celle de la variable centrée (X- μ) ; tel que V(X- μ) = V(X).

Propriété 3 : Si on considère une variable centrée réduite définie par Z = (X- μ)/ σ ou encore :

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}$$

On peut affirmer que V (Z) = 1

5. Loi de probabilité continue

On considère une variable aléatoire X continue, qui peut prendre ses valeurs dans ℝ ou dans l'un de ses intervalles[22].

De façon générale, le domaine de variation de X dans ce cas sera à nouveau noté $\mathcal{V}$ ou X(Ω) et les limites qui le définissent seront appelées $\mathcal{V}_{min}$ et $\mathcal{V}_{max}$. Si $\mathcal{V}=\mathbb{R}$ nous aurons $\mathcal{V}_{min} = -\infty$ et $\mathcal{V}_{max} = +\infty$.

Rappel

Une variable continue peut prendre une infinité de valeurs distinctes. Dans ce cas, on prend en considération des intervalles et non pas des valeurs.

Sachant que $\sum_{i=1}^{n} f_j = 1$, graphiquement cette propriété signifie que la surface située au-dessous de l'histogramme des fréquences est égale à 1.

[22] On peut prendre par exemple le cas des salaires des employés dans une entreprise, ou la taille des individus…

On suppose que toutes les classes aient la même longueur *dx très petite*, dans ce cas les limites d'une classe peuvent être définies par les valeurs x et $x + dx$ où x appartient au domaine de définition de la variable.

Fonction de densité

On définit la probabilité pour que la variable aléatoire X soit comprise entre les valeurs x et $x+dx$, tel que dx est une quantité positive arbitrairement petite, par la relation :

$P\,(x \leq X \leq x + dx) = f\,(x)\,dx$

Cette fonction est supposée définie et continue en tout point *x de* $\mathcal{V}$. Elle est appelée *fonction de densité de probabilité.*

Cette fonction de densité a les propriétés suivantes :

- $f\,(x) \geq 0$ pour tout x de $\mathcal{V}$, ce qui est évident pour que $f(x)dx$ puisse définir une probabilité.
- Si on découpe le domaine $\mathcal{V}$ en intervalles successifs $[x,\ x+dx]$, la somme des probabilités associées à ces intervalles vaut 1, qu'on peut noter[23] : $\int_v f(x)dx = 1$
- Si [a , b] est un intervalle de $\mathcal{V}$, la probabilité d'appartenir à cet intervalle, notée P(a ≤ X ≤ b) est la somme des probabilités associées aux intervalles qui constituent une partition de [a , b], c'est-à-dire :

  $\int_a^b f(x)dx.$

Cette probabilité est représentée par la surface située au-dessous de la courbe de densité de probabilité comprise entre a et b.

[23] Rappel ! Le signe $\int$ (integrale) représente l'opération de sommation pour une variable continue.

Définition

Déterminer *la loi de probabilité d'une variable aléatoire continue* revient à construire une fonction *f* telle que pour tout intervalle [a, b] ou]- ∞, a] ou [a, +∞[ou encore]- ∞, +∞[, la probabilité que X prenne une réalisation dans cet intervalle est égale à l'aire sous la courbe *f* comprise entre les bornes de l'intervalle.

Fonction de répartition

Si on fait tendre ***a*** vers -∞, dans ce cas P (a ≤ X ≤ b) devient P(X ≤ b). Cette probabilité est représentée par la surface située au-dessous de la courbe de densité, à gauche de **b** et qui représente *la fonction de répartition :*

$$F(x) = P(X \leq x), x \in \mathcal{V}.$$

Cette fonction possède aussi quelques *propriétés intéressantes* :

- $F(\mathcal{V}_{min}) = 0$ et $F(\mathcal{V}_{max}) = 1$
- $F(x)$ est une fonction non décroissante de x : *si* $x_1 \leq x_2$, $F(x_1) \leq F(x_2)$
- D'un point de vue pratique, la fonction de répartition est plus utilisée que la fonction de densité de probabilité. Tout d'abord $F(x)$ est une probabilité et non $f(x)$. Notons que $f(x)$ est la dérivée de $F(x)$. Par ailleurs, si x_1 et x_2 sont deux valeurs de x tels que $x_1 \leq x_2$:

  $$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

  On peut remarquer que cette dernière formule nous permet aussi de calculer la valeur de $P(x_1 \leq X \leq x_2)$, $P(x_1 < X < x_2)$ et de $P(x_1 \leq X < x_2)$, sachant que. $P(X=x) = 0$, car *toutes les probabilités ponctuelles sont nulles.*

Espérance mathématique et variance

Une loi de probabilité d'une variable aléatoire continue possède (comme une variable discrète) une moyenne et une variance.

On peut considérer les définitions relatives à une variable discrète et remplacer ∑ par ∫ d'une part, et d'autre part p_x par $f(x)dx$.

Ainsi, on peut noter :

L'espérance mathématique de g(X) :

$$\mathrm{E}[\mathrm{g}(\mathrm{X})] = \int g(x)\, f(x) dx$$

La moyenne μ :

$$\mu = \int x f(x) dx$$

La variance σ^2 :

$$\sigma^2 = \int (\mathrm{x} - \mu)^2 f(x) dx$$

On peut aussi définir un quantile d'ordre p qui correspond à la valeur x_p de X tel que $F(x_p) = p$, $0 < p < 1$. Par exemple, la médiane représente la valeur $x_{1/2}$ de X tel que $F(x_{1/2})=1/2$.

6. Indépendance des variables aléatoires

Indépendance des variables aléatoires discrètes

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes en probabilités si pour tout x et pour tout y :

- $P[(X = x) \mid (Y = y)] = P[X = x]$
- *Ou bien* $P[(Y = y) \mid (X = x)] = P[Y = y]$
- *Ou bien* $P[(X = x) \cap (Y= y)] = P[X = x] \times P[Y = y]$

Indépendance des variables aléatoires continues

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes en probabilité si pour tout x et pour tout y :

- $P[(X \leq x) \cap (Y \leq y)] = P[X \leq x] \times P[Y \leq y]$

$P[(X \leq x) \cap (Y \leq y)]$ représente la loi de probabilité conjointe du couple de variables (X,Y).

7. Exercice corrigé

On lance une pièce de monnaie deux fois.

On s'intéresse au nombre de face obtenue.

On associe à chacun des résultats possibles un nombre entier variant de 0, 1 ou 2.

Quelle est la probabilité associée à chaque valeur de la variable ?

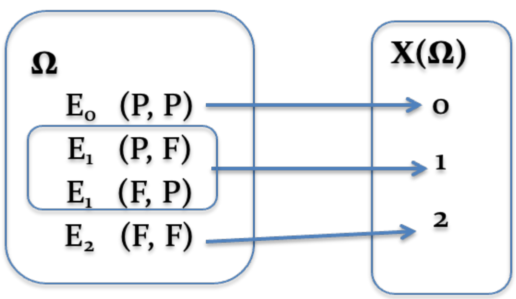
Supposant que nous attribuons pour 0, 1 et 2 à travers la fonction g(x) les valeurs 0, 10 et 20 respectivement. Calculez E(g(X)).

Solution

On lance une pièce de monnaie deux fois, l'univers des possibles est :

Ω : {(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)}.

On s'intéresse au nombre de « face » obtenu et on associe à chacun des résultats possibles un nombre entier variant de 0, 1 ou 2, comme dans le schéma ci-dessous :



- La probabilité associée à chaque valeur de la variable :

P (E_0) = 1/4 ; P (E_1) = 2/4 ; (E_2) = 1/4

Ou bien P (X = 0) = 1/4 ; P (X = 1) = 1/2 ; P (X = 2) = 1/4.

Ou encore p_0 = 1/4 ; p_1 = 1/2 ; p_2 = 1/4.

C'est ainsi que la loi de probabilité dans ce cas est :{ (0, p_0), (1, p_1), (2, p_2) }

- Supposant que nous attribuons pour 0, 1 et 2 à travers la fonction g(x) les valeurs 0, 10 et 20 respectivement. E(g(X) est égale à :

E(g(X)) = (1/4 × 0) + (2/4 × 10) + (1/4 × 20) = 10

NB. Les exercices du chapitre 6 couvrent aussi le chapitre 5.

Chapitre 6.

Les principales lois de probabilités

Chapitre 6.
Les principales lois de probabilités

Il existe de nombreuses lois de probabilités discrètes et continues telles que chacune est liée à des conditions d'application.

On choisira des lois de probabilités qui, par leur simplicité, leur intérêt et leur utilisation en sciences économiques et de gestion nécessitent une description. On abordera en premier lieu les lois de probabilités discrètes et par la suite les lois continues.

1. Lois de probabilité discrètes

1.1 Loi uniforme discrète

Définition

Une variable aléatoire admet une loi uniforme discrète si les probabilités associées aux valeurs x de X sont toutes égales entre elles. Ceci dit, si l'ensemble $\mathscr{V}$ des valeurs possibles de X contient n valeurs, p_x doit être égale à 1/n puisque $\sum_x p_x = 1$. Par extension, X est dans ce cas une variable aléatoire uniforme.

Un cas fréquent est celui où les valeurs de X sont les n premiers nombres entiers :
$\mathscr{V}= \{1,2,.., n\}$, dans ce cas la loi de X est définie par l'ensemble $\{(x , p_x), x = 1,\ldots,n\}$ où $p_x=1/n$.
Le fait que cette variable aléatoire X admet cette distribution ou suit une *loi uniforme discrète* est indiquée par la notation :

$$X \sim \mathcal{U}(1,\ldots,n) \text{ ou } X \sim \mathcal{U}_d(1,\ldots,n)$$

Fonction de répartition

Pour tout entier **r** appartenant à $\mathscr{V}$, $F(x) = \frac{r}{n}$, $r \leq x < r+1$.

Moyenne et variance

La moyenne et la variance de la *loi uniforme discrète* prennent respectivement les valeurs :

$$\mu = \frac{n+1}{2}$$

&

$$\sigma^2 = \frac{n^2-1}{12}$$

1.2 Loi de Bernoulli

On se trouve souvent face à des études qui portent sur une population comportant deux catégories d'individus (défectueux/non défectueux, chômeur/non-chômeur, avis favorable/avis défavorable, succès/échec, validé/non validé), dans ce cas on utilise souvent un codage (0, 1) pour traduire ces situations.

Définition

On considère une expérience aléatoire qui peut donner lieu à deux événements complémentaires S et $\bar{S}$ qu'on appellera succès pour S et échec pour $\bar{S}$ avec des probabilités respectives $P(S) = p$ et $P(\bar{S}) = 1 - p = q$, tel que $0 < p < 1$

Soit X une variable aléatoire qui désigne le nombre de succès obtenu. X prend la valeur 1 si S se réalise et la valeur 0 sinon. Cette variable X est une variable de Bernoulli et la loi de probabilité de X est définie par :

$$\{(0, q), (1, p)\}$$

ou bien

$$P(X = x) = p^x\, q^{1-x} \text{ tel que } (x = 0 \text{ ou } x = 1)$$

Elle est nommée la loi de Bernoulli.

On note : $X \sim \mathscr{B}(p)$.

Fonction de répartition

La fonction de répartition $F(x)$ est définie comme ci-dessous :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ q & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Moyenne et variance

La moyenne et la variance de X qui suit une distribution de Bernoulli prennent respectivement les valeurs :

$$\mu = p \quad \& \quad \sigma^2 = p(1-p) = pq$$

1.3 Loi binomiale

La loi binomiale est l'une des lois, qui occupe une place importante dans l'ensemble des lois de probabilités discrètes.

Elle est liée au schéma de Bernoulli, un schéma qui consiste à répéter n fois une expérience aléatoire *dichotomique*, dans les mêmes conditions, tel qu'un succès se produit avec une probabilité p et ne se produit pas avec une probabilité 1 - p ou q.

On suppose que les résultats des n répétitions de l'expérience sont indépendants. Dans ce cas, le nombre de succès est une variable aléatoire X dont les valeurs possibles sont des entiers successifs 0, 1, 2, … , n et les probabilités sont respectivement q^n, npq^{n-1}, …., p^n.

On note que la loi de probabilité d'une variable aléatoire X est une loi binomiale si les couples (x, p_x) qui la définissent sont tel que x est un entier appartenant à $\mathcal{V} = \{0, 1, \ldots, n\}$ et p_x est égale à :

$$(1.3) \quad p_x = P(X = x) = C_n^x \, p^x \, q^{n-x}$$

En disposant de n et p, qu'on appelle respectivement *l'exposant* et *le paramètre*, la loi binomiale est entièrement spécifiée.

La variable aléatoire X est une variable binomiale et admet une distribution binomiale définie par n et p et on note :

$$X \sim \mathscr{B}(n, p).$$

Fonction de répartition

Si r est un entier de $\mathscr{V}= \{0,1,\ldots,n\}$, la fonction de répartition F(x) est définie comme ci-dessous : $F(x) = \sum_{j=o}^{r} C_n^j \; p^j q^{n-j} \quad r \leq x < r+1$

Moyenne et variance

On peut déterminer la moyenne et la variance de la loi Binomiale, ces indicateurs prennent respectivement les valeurs :

$$\mu = np \;\; \& \;\; \sigma^2 = npq$$

On peut souligner que si p est inconnu, il peut être considéré comme la valeur d'un paramètre π compris entre 0 et 1.

$X \sim \mathscr{B}(n, p)$ est dans ce cas, une loi particulière faisant partie d'une famille de distributions binomiales $\mathscr{B}(n, \pi)$, tel que $0 \leq \pi \leq 1$.

Remarques

- La distribution de Bernoulli est un cas particulier de la distribution Binomiale, correspondant à n=1.
- De façon générale, si $X \sim \mathscr{B}(n, p)$, les valeurs de P(X=x) sont les termes du développement du *binôme* $[(1\text{-}p) + p]^n$.
  Cette propriété est l'origine du nom attribué à cette distribution dite "*Binomiale"*.
- Pour diverses valeurs de n et de p, on dispose de tables ou de logiciels afin de déterminer les probabilités dans le cas où $X \sim \mathscr{B}(n, p)$.
- La variable aléatoire X représente le nombre de succès dans le schéma de Bernoulli. On peut être intéressé par la fréquence Y=X/n.

Dans ce cas, Y est une variable aléatoire qui prend les valeurs 0, 1/n, 2/n, … ,1 avec des probabilités qui peuvent être calculés en utilisant la formule (1.3) et une espérance mathématique et une variance, respectivement égales à :

$$E(Y) = p$$

$$V(Y) = \frac{p(1-p)}{n}$$

Additivité de la loi binomiale

Si X ~ $\mathscr{B}$(n, p), Y ~ $\mathscr{B}$(m, p) et X et Y sont indépendantes, alors X+Y ~ $\mathscr{B}$(n+m, p).

1.4 Loi de Poisson

Le domaine d'application de la loi de Poisson est celui des événements rares. Cependant, cette loi suscite un intérêt réel et permet d'illustrer le cas où le nombre de valeurs possibles de la variable discrète est *infini.*

Définition :

La loi de probabilité d'une variable aléatoire est appelée une loi de Poisson, si elle est définie par l'ensemble des couples (x, p_x) *où* x prend les valeurs 0, 1, 2,…avec les probabilités respectives calculées selon la formule :

$$p_x = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^x}{x!}$$

tel que λ est un paramètre réel positif.

Cette loi est spécifiée par le paramètre λ, ainsi toute variable aléatoire admettant cette loi est notée : X ~ $\mathscr{P}(\lambda)$ et par extension, on parle de variable aléatoire de Poisson.

\Fonction de répartition

Si r est un entier de $\mathscr{V}$= {0, 1, 2,...} = ℕ, la fonction de répartition F(x) est définie comme ci-dessous :

$$F(x) = \sum_{j=0}^{r} \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^j}{j!}, \quad r \le x < r+1$$

Pour des valeurs de λ, il existe une table[24] qui contient les valeurs de la fonction de répartition de la loi de Poisson. Son usage est semblable à celui de la variable binomiale.

Moyenne et variance

On peut déterminer la moyenne et la variance de la loi de Poisson, ces indicateurs prennent respectivement les valeurs :

$$\mu = E(X) = \lambda \ \& \ \sigma^2 = V(X) = \lambda$$

Remarque

La loi de Poisson peut être considérée comme un cas limite de la distribution binomiale. En effet, la probabilité associée à une valeur *x* d'une variable aléatoire binomiale tend vers la probabilité associée à la même valeur d'une variable de Poisson, quand n tend vers l'infini et π vers 0, de telle sorte que le produit $\boldsymbol{n\pi}$ reste égal à une constante λ.

$$\lim_{\substack{n \to +\infty, \pi \to 0 \\ n\pi \to \lambda}} \mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{x}}\ \pi^x (1-\pi)^{n-x} = \frac{e^{-\lambda}\ \lambda^x}{x!}$$

Normalement, si $n \geq 25$ et $\pi \leq 0.10$ une variable aléatoire X qui suit une *loi binomiale* de paramètre **n,** $\boldsymbol{\pi}$ peut être approchée par la *loi de Poisson* de paramètre $\boldsymbol{\lambda = n\ \pi}$. Il existe d'autres approximations qui peuvent être aussi utilisées[25].

Additivité de la loi de Poisson

Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathscr{P}(\mu)$ et X et Y sont indépendantes, alors $X+Y \sim \mathscr{P}(\lambda+\mu)$.

1.5 Loi géométrique et loi de Pascal

Ces lois modélisent les situations où l'on s'intéresse au nombre d'épreuves de Bernoulli (deux issues) indépendantes nécessaires pour obtenir le $k^{\text{ème}}$ succès.

- Si k=1, la variable « rang d'apparition du premier succès » suit une loi géométrique.

---

[24] Ces tables sont disponibles sur Classroom où se trouve gratuitement cet ouvrage.

[25] Selon Lefebvre (2011), en général une approximation de poisson devrait être bonne si $n > 20$ et $\pi < 0.05$; et selon Denglos (2008) si $n \geq 30$ et $\pi \leq 0.01$.

- Si k >1, la variable « rang d'apparition du premier succès » suit une loi de Pascal.

1.5.1 Loi géométrique

Définition

Une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p, tel que $\mathscr{V} = \{1, 2\ldots, n, \ldots\}$, si pour tout entier naturel x non nul on a :

$$p_x = P(X = x) = p\,(1-p)^{x-1}$$

X suit une loi géométrique de paramètre p est noté : $X \sim \mathscr{G}(p)$ ou $X \sim \mathscr{G}\acute{e}om\,(p)$

On peut noter que la distribution de probabilité géométrique est toujours *dissymétrique et étalée vers la droite*. Elle *est décroissante.*

Proposition

Si X suit une loi géométrique de paramètre p, alors $p\,[X > x] = (1 - p)^x$ pour x non nul. Ainsi, la fonction de répartition de X est donnée par : $F(x) = 1 - q^x$

Remarque : on peut définir la distribution géométrique comme étant le nombre d'essais de Bernoulli effectués avant d'obtenir un premier succès.

Moyenne et variance

On peut déterminer la moyenne et la variance de la loi géométrique, ces indicateurs prennent respectivement les valeurs :

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Propriété de non-vieillissement

Si X suit une loi géométrique alors pour tout couple d'entiers non nuls t et h :

$$\mathbf{P\,[X > t+h \mid X > h] = P\,[X > t]}$$

Cette propriété n'est valide que pour des t et h qui sont des entiers naturels. On peut aussi noter que seulement la loi géométrique et la loi exponentielle possèdent cette propriété de non-vieillissement.

1.5.2 Loi de Pascal ou loi Binomiale Négative

Soit X une variable aléatoire qui compte le nombre d'essais de Bernoulli effectué jusqu'à ce que l'on obtienne un $k^{ème}$ succès où k = 1, 2, …

Une variable aléatoire X suit une loi de Pascal de paramètre k et p, tel que $\mathscr{V} = \{k, k+1, \dots, n, \dots\}$, si pour tout entier naturel x non nul on a :

$$p_x = P(X = x) = C_{x-1}^{k-1}\, p^k\, q^{x-k}$$

Cette loi est aussi connue sous le nom de la loi Binomiale Négative. Si X suit une loi de Pascal ou une loi Binomiale Négative de paramètre k et p , elle est notée :

$$X \sim \mathscr{BN}(k\,;\,p) \text{ ou } X \sim \mathscr{P}(k\,;\,p).$$

Remarque

La distribution géométrique est un cas particulier de la distribution binomiale négative obtenue avec k = 1.

Moyenne et variance

Lorsque $X \sim \mathscr{BN}(k, p)$, on peut déterminer la moyenne et la variance qui prennent respectivement les valeurs :

$$E(X) = \frac{k}{p}$$

$$V(X) = \frac{k(1-p)}{p^2}$$

1.6 Loi hypergéométrique

La loi hypergéométrique est précieuse dans des *situations de sondage*, car celles-ci correspondent la plupart du temps, à des choix de **n** individus parmi **N**, que ce soit des pièces pour un contrôle de qualité ou des personnes choisies pour être interrogées, par tirage ***sans*** remise.

Parmi N individus de la population, nous avons ceux qui ont la caractéristique A en proportion p=N1/N et ceux qui n'ont pas cette caractéristique A.

Définition

Une variable aléatoire X suit une loi hypergéométrique de paramètres N, n et $p=N_1/N$ tel que $\mathcal{V}=\{0, 1, 2,\dots,n\}$, si pour x de $\mathcal{V}$ on a :

$$P(X = x) = \frac{C_{N_1}^{x} C_{N-N_1}^{n-x}}{C_{N}^{n}}$$

Si X suit une loi hypergéométrique de paramètres n, N, et $p=N_1/N$, elle est notée :

$$X \sim \mathcal{H}(N ; n ; p).$$

Moyenne et variance

Lorsque $X \sim \mathcal{H}(N ; n ; p)$, on peut déterminer la moyenne et la variance qui prennent respectivement les valeurs :

$$E(X) = np$$

$$V(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$$

La grandeur $\frac{N-n}{N-1}$ est appelée *le facteur d'exhaustivité*.

Lorsque N est grand comparativement à n, le tirage avec remise ou sans remise est presque la même chose. Dans ce cas, on peut utiliser la loi binomiale pour avoir une approximation de la loi hypergéométrique lorsque le taux de sondage $n/N < 0.1$

Dans cette section, on a parcouru les lois de probabilités discrètes. On peut présenter d'autres, mais l'objectif n'est pas de faire un inventaire détaillé de ces distributions, mais d'aborder celles dont l'intérêt est lié aux conditions de leur existence et qui sont souvent utilisées en sciences économiques et en sciences de gestion. On suivra la même logique pour introduire les lois de probabilités continues.

2. Lois de probabilité continues

2.1 Loi uniforme continue

Cette loi est l'équivalent continu de la loi uniforme discrète. Elle concerne des variables aléatoires qui varient entre deux limites $\mathcal{V}_{min}$ = a et $\mathcal{V}_{max}$ = b de telle façon que la probabilité d'appartenir à un intervalle (x, x+dx) inclus dans [a , b], de longueur fixée dx est constante, quelle que soit la valeur de x dans cet intervalle.

Définition :

Une loi est uniforme sur un intervalle [a, b], si elle admet une fonction de densité, de probabilité constante sur cet intervalle et nulle ailleurs. On peut définir la loi uniforme par la fonction de densité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

Cette loi est spécifiée par la connaissance de a et de b et elle est notée :

$$X \sim \mathcal{U}[a, b] \text{ ou } X \sim \mathcal{U}_c[a, b].$$

Par extension, la variable aléatoire X est une variable uniforme.

Fonction de répartition

La fonction de répartition $F(x)$ est définie comme ci-dessous :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Espérance mathématique, variance et quantile

Cette loi a pour moyenne μ ou E(X), variance σ^2 ou V(X) et quantile x_p d'ordre p les valeurs suivantes :

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$x_p = a + p(b-a)$$

Remarque

Cette loi est symétrique et ne possède pas de mode.

2.2 Loi Normale (Loi de Laplace-Gauss)

Cette loi est la plus connue des lois continues. Elle est définie par la fonction de densité suivante :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad x \in \mathbb{R}$$

La courbe de densité est symétrique par rapport à x=μ et elle est sous forme de cloche. Elle possède deux points d'inflexion distants de l'axe de symétrie d'une quantité égale à σ.

μ et σ correspondent à la moyenne et à l'écart-type de cette loi. Notons que *f(x)* est spécifiée dès que l'on connait ces deux paramètres.

D'autre part, si X est une variable aléatoire qui admet une distribution normale, elle est notée :

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Proposition

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et si $Y = aX + b$, alors Y suit également une loi normale.

Additivité de la loi normale

Si X ~ $\mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x)$, Y ~ $\mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y)$ et X et Y sont *indépendantes*, alors X+Y suit également une loi normale.

Distribution normale centrée réduite

On appelle une loi centrée réduite, une loi normale de moyenne nulle et de variance égale à 1, telle que :

$$Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Z est une variable normale centrée réduite qui se distingue par sa simplicité et sa facilité d'utilisation.

Fonction de densité

Si *f(x)* est la fonction de densité de cette loi, on constate aisément qu'elle est symétrique par rapport à 0 :

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right], \quad z \in \mathbb{R}$$

Fonction de répartition

Dans une courbe de densité, en prenant en considération une valeur positive z quelconque, on peut noter que :

$$F(-z) = 1 - F(z)$$

Lien entre X ~ N (μ, σ) *et Z ~ N (0,1)*

Il est toujours possible de transformer une loi normale en une loi normale centrée réduite et inversement. Pour obtenir cette dernière, il suffit de changer d'origine et d'unité, ce qui s'exprime par une variable aléatoire Z :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Comme pour les autres lois, on a généralement recours à des tables statistiques ou à des logiciels, mais qui ne concernent cette fois-ci que la fonction de répartition de la loi *normale centrée réduite*.

Quantiles z_p d'ordre p

Le quantile z_p d'ordre p, où p est un nombre réel compris entre 0 et 1, est la valeur Z telle que[26] : P (Z $\leq$ z_p) = p ou F(z_p) = p.

Remarque

- Afin de distinguer la distribution de X ~ $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et de Z ~ $\mathcal{N}(0,1)$, on a fait explicitement apparaître le nom de chacune des variables dans les concepts utilisés. Ainsi, la fonction de répartition de ces deux lois est notée F(x) dans le premier cas et F(z) dans le second, à titre d'exemple.
- On peut noter que X s'exprime en fonction de Z par la relation : X = $\mu + \sigma$Z.
- Si X ~ $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, la probabilité que X prenne une valeur :
  - dans l'intervalle centré sur μ et de demi-amplitude σ est égale à 68.26%.
  - dans l'intervalle centré sur μ et de demi-amplitude 2σ est égale à 95.44%.
  - dans l'intervalle centré sur μ et de demi-amplitude 3σ est égale à 99.74%.

C'est en fait une petite introduction aux *intervalles de confiance*. Les calculs seront détaillés dans l'exercice 20 de ce chapitre.

2.3 Loi de Khi-deux de Pearson

La loi de Khi-deux de Pearson est *indispensable* pour réaliser *des tests d'indépendance* de variables statistiques, ainsi que pour *tester la qualité d'ajustement* de distributions empiriques par des lois théoriques.

Définition

Soit $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ une suite de n variables aléatoires indépendantes et qui suivent chacune la loi normale centrée réduite, alors K = $\sum_{i=1}^{n} Z_i^2$ suit une loi de Khi-deux à n degrés de liberté.

On note : X ~ $\mathcal{X}_n^2$

[26] On peut utiliser la table statistique qui permettra d'obtenir directement la valeur de z_p pour diverses valeurs de p.

Additivité de la loi de Khi-deux

Si X et Y sont *deux variables indépendantes* tel que X ~ $\mathcal{X}_n^2$ et Y ~ $\mathcal{X}_m^2$ alors X+Y ~ $\mathcal{X}_{n+m}^2$

Moyenne et variance

Si X ~ $\mathcal{X}_n^2$ alors E(X) = n *et* V(X) = 2n.

2.4 Loi de Student

La loi de Student est très présente dans les problèmes de construction d'intervalles de confiance. Elle sert également pour des tests statistiques et notamment dans le test de *significativité du coefficient d'une régression linéaire*.

Définition

Soit Z une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite. Soit K une variable aléatoire qui suit une loi de Khi-deux à n degrés de liberté.

Si Z et K *sont indépendantes*, alors la variable aléatoire T = $\frac{Z}{\sqrt{\frac{K}{n}}}$ suit une loi de Student à n degrés de liberté et on note T ~ St_n

Moyenne et variance :

Si T ~ St_n alors E(T) = 0 si n > 1 et V(T) = n/(n-2) si n > 2

2.5 Loi log-normale

La loi log-normale est dérivée de la loi normale. En effet, une variable aléatoire X suit une loi log-normale de paramètres μ et σ si la variable aléatoire ln(X) suit la loi normale $\mathcal{N}$(μ, σ).

Définition

X suit une loi log-normale de paramètre μ et σ si la fonction de densité de probabilité est pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2\right],\ \ x \in \mathbb{R}$$

On note $X \sim LN(\mu, \sigma)$.

Moyenne et variance

Si $X \sim LN(\mu, \sigma)$ alors $E(X) = e^{\mu + \sigma^2/2}$ et $V(X)= e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$

L'avantage de cette loi par rapport à la loi normale réside dans le fait qu'une variable aléatoire log-normale ne prend que des valeurs positives. Du point de vue d'un économiste, ceci peut être intéressant, puisque de nombreuses variables économiques sont toujours positives.

2.6 Loi de Fisher-Snedecor

Cette loi joue un rôle important pour la comparaison des variances de variables aléatoires dont les réalisations sont issues d'échantillons extraits de deux populations. Elle est aussi utile pour tester la significativité globale d'un modèle de régression linéaire multiple et s'il existe une relation significative entre une variable dépendante et des variables indépendantes.

Définition

Soit K_1 une variable aléatoire qui suit une loi de Khi-deux à n_1 degrés de liberté.

Soit K_2 une variable aléatoire qui suit une loi de Khi-deux à n_2 degrés de liberté.

Si K_1 et K_2 sont deux variables indépendantes, alors la variable aléatoire $X = (K_1/ n_1) / (K_2/ n_2)$ suit une loi de Fisher-Snedecor à (n_1, n_2) degrés de liberté et on note :

$$X \sim \mathscr{F}(n_1, n_2).$$

Espérance mathématique et variance

Si X ~ $\mathscr{F}(n_1, n_2)$ alors :

$$E(X) = n_2/(n_2-2) \text{ pour } n_2 > 2$$

&

$$V(X) = \frac{2n_2^2\,(n_1 + n_2 - 2)}{n_1(n_2 - 4)(n_2 - 2)^2}$$

pour $n_2 > 4$

2.7 Loi exponentielle

La loi exponentielle est fréquemment adaptée à la modélisation des durées de vie de composants électroniques par exemple, ou à la durée qui sépare deux événements.

Définition

Une variable aléatoire suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si la fonction de densité est définie pour un ***x*** positif par :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Si X suit une loi exponentielle, on note X ~ $\mathscr{E}(\lambda)$.

Espérance mathématique et variance

Si X ~ $\mathscr{E}(\lambda)$, alors E(X) = $1/\lambda$ et V(X) = $1/\lambda^2$

Fonction de répartition

La fonction de répartition est définie pour $x > 0$ par $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

*Proposition (propriété de **Markov** - propriété de **non-vieillissement**)*

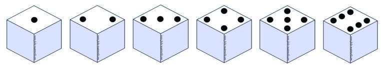
Si X~ $\mathscr{E}(\lambda)$, alors p [X > h+t | X > h] = p [X>t]

Avec la loi exponentielle, on termine ce dernier chapitre concernant les principales lois de probabilités continues et discrètes. Nous rappelons que nous avons choisi des lois qui par leur simplicité, leur intérêt et leur utilisation en sciences économiques et en sciences de gestion nécessitent une description, sachant qu'il y a d'autres qui ne sont pas abordées dans cet ouvrage.

3. Exercices corrigés

Exercice 1

On lance 1 dé équilibré et on considère une variable aléatoire X qui représente le résultat obtenu.



- *Quelle est la loi que suit la variable aléatoire X ?*
- *Calculez son espérance mathématique et sa variance*

Solution

X suit une loi uniforme discrète sur l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 6}, tel que $p_x = 1/6$

$X \sim U_d\,(1, \ldots ,6)$

$E(X) = (1+2+3+4+5+6) / 6 = 3.5$

$V(X) = ((-2.5)^2+(-1.5)^2+ (-0.5)^2+ (0.5)^2+ (1.5)^2+ (2.5)^2) / 6 = 2.92$

En appliquant les formules introduites dans le chapitre nous avons aussi :

$E(X) = 3.5$

$V(X) = 35/12$

Exercice 2

On considère 3 clients dans un supermarché. La probabilité d'achat d'un produit est. $p = 0.4$ et du non-achat $1\text{-}p = 0.6$.

On considère une variable aléatoire X qui correspond au nombre de clients qui ont effectué un achat.

- *Quelle est la probabilité que 2 clients fassent un achat ?*

Solution

Dans ce cas nous avons X qui suit une loi binomiale, $X \sim \mathcal{B}(3, 0.4)$

Ceci dit la probabilité que 2 clients fassent un achat est égale à :

$$P(X = 2) = C_3^2\ (0.4)^2\ (0.6)^1$$

Exercice 3

On considère une expérience qui consiste à tirer au hasard *5* boules (avec remise) dans une urne de 10. Ces boules sont de deux types : des boules blanches et des boules noires. On dispose de 4 boules blanches et 6 boules noires.

- *Quelle est la probabilité de tirer 2 boules blanches ?*

Solution

La probabilité de tirer 2 boules blanches ?

$$C_5^2\left(\frac{4}{10}\right)^2\left(\frac{6}{10}\right)^3$$

Bonus ! Si on dispose de 3 boules blanches et 7 boules noires, dans ce cas la probabilité de tirer 2 boules blanches est égale à :

$$C_5^2\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right)^3$$

Exercice 4

On considère une expérience qui consiste à tirer au hasard *6* boules (avec remise) dans une urne de 10. Ces boules sont de deux types : des boules blanches et des boules noires. On dispose de 2 boules blanches et 8 boules noires.

- *Quelle est la probabilité de tirer 2 boules blanches ?*

Solution

La probabilité de tirer 2 boules blanches dans ce cas est égale à :

$$C_6^2\left(\frac{2}{10}\right)^2\left(\frac{8}{10}\right)^4$$

Exercice 5

Un dé est lancé 4 fois de suite.

On considère X_i , $i = 1, 2, 3, 4$ une variable aléatoire indicatrice de l'événement « obtenir 3 au $i^{\text{ème}}$ lancer ».

X est une variable aléatoire qui représente le nombre total de fois où 3 est obtenu.

Quelle est la probabilité d'obtenir 3 deux fois sur 4 lancers ?

Solution

X est une variable aléatoire qui représente le nombre total de fois où 3 est obtenu.

Dans ce cas $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Sachant que $X_i \sim \mathscr{B}(1/6)$, $X \sim \mathscr{B}(4, 1/6)$

X suit une loi binomiale :

Sachant que $P(X = x) = C_4^x\ p^x q^{4-x}$

Nous obtenons : $P(X = 2) = C_4^2\ (1/6)^2\,(5/6)^2$

NB. En utilisant la table de la distribution binomiale de la fonction de répartition, nous obtiendrons le *même résultat, en prenant en considération :*

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$P(X = 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) = F(2) - F(1)$

Exercice 6

3 employés du télémarketing réussissent en moyenne la vente d'un produit lors d'un appel sur 5.

En 15 minutes, le premier employé a contacté 2 clients, le deuxième a contacté 3 clients et le troisième a contacté 5 clients.

- *Quelle est la loi que suit la variable aléatoire T qui représente le nombre total des ventes en 15 minutes ?*
- *Quelle est la probabilité que le total des ventes T soit ≤ 3 ?*

Solution

On considère les variables aléatoires suivantes :

- X le nombre total des ventes du premier employé.
- Y le nombre total des ventes du deuxième employé.
- Z le nombre total des ventes du troisième employé.

Dans ce cas :

- $X \sim \mathscr{B}(2, 1/5)$
- $Y \sim \mathscr{B}(3, 1/5)$
- $Z \sim \mathscr{B}(5, 1/5)$

Puisque les résultats obtenus par les trois employés peuvent être considérés comme indépendants

La loi que suit T qui représente le nombre total de ventes est la loi binomiale $\mathscr{B}(10, 1/5)$

La probabilité que le total des ventes soit ≤ 3, c'est-à-dire $P(T \leq 3)$:

$P(T \leq 3) = F(3)$

$$= \sum_{j=0}^{3} C_{10}^{j} (1/5)^{j} (4/5)^{10-j}$$

$= 0.8791$

Exercice 7

On lance une pièce de monnaie deux fois.

On s'intéresse à X une variable aléatoire qui représente le nombre de « pile » obtenu.

- *Quelle est la loi que suit la variable aléatoire X ?*
- *Quelles sont les probabilités associées à x = 0, 1, 2 ?*

Solution

On lance une pièce de monnaie deux fois. Dans ce cas l'univers des possibles est :

$$\Omega : \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}.$$

X est le nombre de « pile » obtenu et admet une distribution *B*inomiale.

Ceci dit : $X \sim \mathscr{B}(2, 0.50)$

$X(\Omega) : \{0, 1, 2\}$

Les probabilités associées à x = 0, 1, 2 sont respectivement :

$P(X=0) = p_0 = 1/4 = 0.25$

$P(X=1) = p_1 = 2/4 = 0.50$

$P(X=2) = p_2 = 1/4 = 0.25$

Exercice 8

On estime une probabilité de 1% pour qu'une page dans un livre de 500 pages contienne au moins une erreur.

Quelle est la probabilité que ce livre de 500 pages en contienne au moins 497 sans erreur ?

Solution :

On considère X une variable aléatoire qui représente le nombre de pages du livre comprenant au moins une erreur. Dans ce cas :

$$X \sim \mathscr{B}(500, 0.01)$$

$$X \sim \mathscr{P}(5)$$

La probabilité que ce livre de 500 pages en contienne au moins 497 *sans* erreur est égale à $P(X \leq 3) = F(3)$.

$$F(3) = \sum_{j=0}^{3} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{j}}{j!}$$

De la table statistique de la fonction de répartition de la loi de poisson, nous pouvons noter que $F(3) = 0.2650$

Bonus !

Si le livre contient 600 pages et on s'intéresse à la probabilité qu'il contienne au moins 596 *sans* erreur, dans ce cas nous calculons ($P(X \leq 4)$ pour $X \sim \mathscr{P}(6)$.

Dans ce cas $F(4) = 0.2851$

Exercice 9

On étudie un nouveau type de freins. Ces freins pourraient durer plus de 100 000 km pour 95% des voitures.

On sélectionne 200 voitures utilisant ces freins.

X : le nombre de voitures dont les freins ne dureront pas 100 000 km

- *Quelle est la probabilité que suit la variable aléatoire X ?*
- *Quelle est la probabilité que 15 voitures ou plus doivent changer les freins avant 100 000 km ?*

Solution

On dispose de 200 voitures utilisant ces freins.

X : le nombre de voitures dont les freins ne dureront pas 100 000 km. Dans ce cas

$$X \sim \mathscr{B}(200, 0.05)$$

$$X \sim \mathscr{P}(10)$$

La probabilité que 15 voitures ou plus doivent changer les freins avant 100 000 km est :

$$\begin{aligned} P(X \geq 15) &= 1 - P(X \leq 14) \\ &= 1 - F(14) \\ &= 1 - 0.9165 \\ &= 0.0835 \end{aligned}$$

Exercice 10

Un professeur a corrigé 60 copies anonymes d'un examen. Il cherche la copie d'un étudiant. A chaque fois il prend une copie, il lui demande si c'est la sienne. Si la réponse est négative, il la rend au paquet, juste pour l'expérience!

Quelle est la probabilité que l'étudiant reconnaisse sa copie au bout de 5 essais ?

Solution

On considère la variable aléatoire X qui représente le nombre de répétitions de l'expérience jusqu'à ce que l'étudiant reconnaisse sa copie. Dans ce cas :

$$X(\Omega) = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$$

La population est constituée de deux catégories de copies, celle qui appartient à l'étudiant avec une probabilité de 1/60 et celles qui ne lui appartiennent pas avec une probabilité de 59/60.

Dans ce cas X qui suit la loi géométrique : $X \sim \mathscr{G}(1/60)$

La probabilité que l'étudiant reconnaisse sa copie au bout de *5* essais :

$$P(X=x) = p\,(1-p)^{x-1}$$

$$P(X = 5) = (1/60)\,(59/60)^4$$

Bonus ! Supposant que le professeur a corrigé 70 copies *anonymes* dans ce cas :

X suit la loi géométrique : $X \sim \mathscr{G}(1/70)$

La probabilité que l'étudiant reconnaisse sa copie au bout de *5* essais :

$$P(X=5) = (1/70) \times (69/70)^4 = 0.0135$$

Exercice 11

Un professeur a corrigé 50 copies anonymes d'un examen. Il cherche la copie d'un étudiant. A chaque fois il prend une copie, il lui demande si c'est la sienne. Si la réponse est négative, il la rend au paquet, juste pour faire une expérience!

- *Quelle est la probabilité que l'étudiant reconnaisse sa copie au bout de 3 essais ?*
- *Calculez l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X qui représente le nombre de répétitions de l'expérience jusqu'à ce que l'étudiant reconnaisse sa copie.*

Solution

X suit la loi géométrique : $X \sim \mathcal{G}(1/50)$

La probabilité que l'étudiant reconnaisse sa copie au bout de *3* essais :

$P(X=3) = (1/50) \times (49/50)^2$

$= 0.0192$

L'espérance mathématique et la variance :

$E(X) = 1/(1/50) = 50$

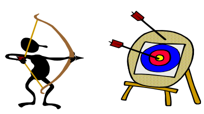
$V(X) = (1 - (1/50))/ (1/50)^2 = 2450$

Exercice 12

Une personne tire sur une cible jusqu'à ce qu'elle l'ait atteinte 3 fois. La probabilité d'atteindre la cible est de 0.7.

On considère une variable aléatoire X qui représente est le nombre de tirs nécessaires pour terminer l'expérience.

Quelle est la probabilité que cette personne doive tirer exactement 5 fois ?



Solution

X qui représente est le nombre de tirs nécessaires pour terminer l'expérience d'atteindre la cible 3 fois. Dans ce cas :

$X(\Omega) = \{3, 4, 5, \ldots\}$, $k = 3$ |

On suppose que les tirs sont indépendants.

X suit la loi de Pascal ou la loi binomiale négative $X \sim \mathscr{BN}(3 ; 0.7)$

$P(X = 5) = C_4^2 (0.7)^3 (0,3)^2$

$= 0.1852$

Bonus ! Si la personne cesse de tirer dès qu'elle atteint la cible la première fois, dans ce cas :

$$X \sim \mathscr{G}(0,7)$$

La probabilité que cette personne doive tirer exactement 5 fois :

$P(X = 5) = (0,7)^1 (0,3)^4$

$= (0,7)(1 - 0,7)^4$

Exercice 13

Une multinationale a fabriqué 40 ordinateurs avec une technologie 5G pour les tester pendant une certaine période. Elle a décidé de les soumettre à un contrôle. Un gestionnaire de la production suppose que 5% des ordinateurs sont défectueux (D) et 95% sont bons (B).

On considère la variable aléatoire X qui associe (1) à un ordinateur choisi au hasard s'il est défectueux et lui associe (0) s'il est bon.

- *Déterminez X(Ω).*
- *Quelle est la loi que suit la variable aléatoire X ? Calculez son espérance mathématique, sa variance et son écart-type.*
- *Supposant qu'on répète l'expérience 4 fois avec remise, quelle est dans ce cas la loi que suit une variable aléatoire X, qui représente le nombre d'ordinateurs qui sont défectueux. Déterminez X(Ω) et E(X).*

Solution

$X(\Omega) = \{0, 1\}$

La loi que suit la variable aléatoire X est la loi binomiale : $X \sim \mathscr{B}(0.05)$

L'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X

- $E(X) = 0.05$
- $V(X) = 0.0475$
- $\sigma_X = 0.2179$

Supposant qu'on répète l'expérience 4 fois avec remise, la loi que suit une variable aléatoire X, qui représente le nombre d'ordinateurs qui sont défectueux est la loi binomiale :

$$X \sim \mathscr{B}(4, 0.05)$$

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$E(X) = 0.2$$

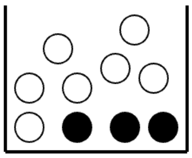
Exercice 14

Une expérience consiste à tirer au hasard 3 boules sans remise dans une urne de 10.

Ces boules sont de deux types : des boules blanches (7) et des boules noires (3)

X est une variable aléatoire qui représente le nombre de boules blanches.

Quelle est la probabilité de tirer 2 boules blanches sans remise ?



Solution :

X est une variable aléatoire qui représente le nombre de boules blanches.

X suit la loi hypergéométrique : $X \sim \mathscr{H}(10; 3 ; 7/10)$

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

$$P(X=2) = \frac{C_7^2 C_3^1}{C_{10}^3}$$

Bonus ! Supposant nous avons des boules blanches (2) et des boules noires (8)

La probabilité de tirer 2 boules blanches sans remise

X suit la loi hypergéométrique : $X \sim \mathscr{H}(10; 3 ; 2/10)$

$X(\Omega) = \{ 0, 1, \mathbf{2} \}$; puisque dans l'urne on dispose que de 2 boules blanches !

$$P(X = 2) = \frac{C_2^2 C_8^1}{C_{10}^3}$$

Exercice 15

Dans une entreprise, un manager demande à son assistant de tirer au hasard sans remise 20 employés parmi un total de 40 et de déterminer la loi de la variable aléatoire X qui représente *le nombre d'employés qui sont en retard.*

Le manager précise que 10% parmi un total de 40 employés sont en retard

Quelle est la probabilité de tirer 20 employés qui ne sont pas en retard ?

Solution

X suit la loi hypergéométrique $X \sim \mathcal{H}(40; 20 ; 4/40)$

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

La probabilité de tirer 20 employés qui ne sont pas en retard, veut dire que sur 20 employés, on ne trouve aucun qui a été en retard. Dans ce cas on cherche P(X=0).

$$P(X = 0) = \frac{C_4^0 C_{36}^{20}}{C_{40}^{20}}$$

P(X=0) = 0,053

Exercice 16

On considère une expérience aléatoire qui consiste à tirer au hasard *5 boules* dans une urne de 12 boules, *4 d'entre elles sont blanches* et 8 sont noires.

- *Quelle est la probabilité de tirer 3 boules blanches avec remise ?*
- *Quelle est la probabilité de tirer 3 boules blanches sans remise ?*
- *Soit X une variable aléatoire qui représente le nombre de boules blanches lors d'un tirage de 5 boules sans remise. Quelle est la loi de probabilité que suit la variable aléatoire X ? Déterminez ses paramètres et X (Ω)*
- *Calculez l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X*

Solution

- La probabilité de tirer 3 boules blanches *avec* remise :

Soit A l'événement « Tirer 3 boules blanches avec remise »

$$P(A) = C_5^3 (\frac{4}{12})^3 (\frac{8}{12})^2$$

P(A) = 10 × (1/3)^3 × (2/3)^2

= 10 × (1/27) × (4/9)

= 16 /243

= 0.1646

- La probabilité de tirer 3 boules blanches *sans* remise ?

Soit A l'événement « Tirer 3 boules blanches sans remise »

$$P(B) = \frac{C_4^3 C_8^2}{C_{12}^5}$$

P(B) = (4 × 28) / 792

= 0.1414

- X est une variable aléatoire qui représente le nombre de boules blanches lors d'un tirage de 5 boules sans remise. La loi de probabilité que suit la variable aléatoire X est la loi hypergéométrique :

X suit une loi hypergéométrique : X~ $\mathscr{H}$(12, 5 , 4/12) ou bien X~ $\mathscr{H}$(12 , 5, 1/3)

N = 12, n = 5 et p = 1/3

X(Ω) = { 0, 1, 2, 3, 4 }

- L'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X
  - E(X) = 5/3 = 1.66
  - $V(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$ = 0.70

Exercice 17

Une expérience aléatoire consiste à choisir au hasard *(sans remise)* 7 étudiants d'un groupe de 10. Parmi les 10 étudiants, 4 sont des garçons.

Quelle est dans ce cas la probabilité de choisir 3 filles ?

X est une variable aléatoire qui représente le nombre de filles choisies au hasard lors de cette expérience aléatoire.

Quelle est la loi de probabilité que suit la variable aléatoire X ?

Déterminez ses paramètres et X (Ω).

Calculez l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X.

Solution

Soit A l'événement « choisir 3 filles »

$$P(A) = \frac{C_6^3 C_4^4}{C_{10}^7}$$

P(A) = (20 × 1) / 120 = 0.1666

X est une variable aléatoire qui représente le nombre de filles choisies au hasard lors de cette expérience aléatoire.

La loi de probabilité que suit la variable aléatoire X est la loi hypergéométrique :

$$X \sim \mathscr{H}(10, 7, 6/10) \text{ ou bien } X \sim \mathscr{H}(10, 7, 3/5)$$

Tel que N = 10, n = 7 et p = 6/10

X(Ω) = { 0,1, 2, 3, 4 , 5, 6 }

L'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X :

- E(X)= np = 21/5 = 4.2
- $V(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1} = 0.56$

Exercice 18

Supposons qu'il soit établi que le temps d'attente d'un tramway, pendant une période pour un passager qui entre sur le quai est une variable aléatoire X qui suit une loi uniforme continue sur l'intervalle [0, 10].

- *Déterminez sa fonction de densité et sa fonction de répartition.*
- *Quelle est la durée moyenne d'attente ?*
- *Quelle est la variance de la durée d'attente ?*
- *Quelle est la probabilité d'attendre le maximum 5 minutes ?*

Solution

Sa fonction de densité

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/10 & 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & x > 10 \end{cases}$$

Sa fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x/10 & 0 \leq x \leq 10 \\ 1 & x > 10 \end{cases}$$

La durée moyenne d'attente :

X ~ U [0, 10]

E(X) = 5

La variance de la durée d'attente :

V(X) = 8.33

La probabilité d'attendre le maximum 5 minutes ?

F (5) = 5/10

Exercice 19

X est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme continue sur [-3, 3]

Déterminez sa fonction de densité.

Déterminez sa fonction de répartition.

Solution :

Sa fonction de densité

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < -3 \\ 1/6 & -3 \leq x \leq 3 \\ 0 & x > 3 \end{cases}$$

Sa fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -3 \\ (x+3)/6 & -3 \leq x \leq 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

Déterminez sa moyenne est sa variance

- $E(X)=0$
- $V(X)=3$

Exercice 20

Les intervalles de confiance

On considère une variable aléatoire qui suit une loi normale, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

Pourquoi la probabilité que X prenne une valeur :

- dans un intervalle centré autour de μ et de demi-amplitude σ est de 68,26% ?
- dans un intervalle centré autour de μ et de demi-amplitude 2σ est de 95,44% ?
- dans un intervalle centré autour de μ et de demi-amplitude 3σ est de 99,74% ?
- dans un intervalle centré autour de μ et de demi-amplitude 1.96σ est 95.00% ?

Solution :

La probabilité que X prenne une valeur dans un intervalle centré autour de μ et de demi-amplitude σ est de 68,26% car :

$$\begin{aligned} P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) &= P((\mu - \sigma - \mu)/\sigma)) \leq (X - \mu)/\sigma \leq P((\mu + \sigma - \mu)/\sigma)) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 1) \\ &= F_z(1) - F_z(-1) \\ &= F_z(1) - (1 - F_z(1)) \\ &= 2\, F_z(1) - 1 \\ &= 2\,(0.8413) - 1 \\ &= 0.6826 \end{aligned}$$

La probabilité que X prenne une valeur dans un intervalle centré autour de μ et de demi-amplitude 2σ est de 95,44% car :

$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 2\, F_z(2) - 1$

$= 2\,(0.9772) - 1$

$= 0.9544$

La probabilité que X prenne une valeur dans un intervalle centré autour de μ et de demi-amplitude 3σ est de 99,74% car :

$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 2\, F_z(3) - 1$

$= 2\,(0.9987) - 1$

$= 0.9974$

La probabilité que X prenne une valeur dans un intervalle centré autour de μ et de demi-amplitude 1.96σ est 95.00% car :

$P(\mu - 1.96\sigma \leq X \leq \mu + 1.96\sigma) = 2\, F_z(1.96) - 1$

$= 2\,(0.9750) - 1$

$= 0.9500$

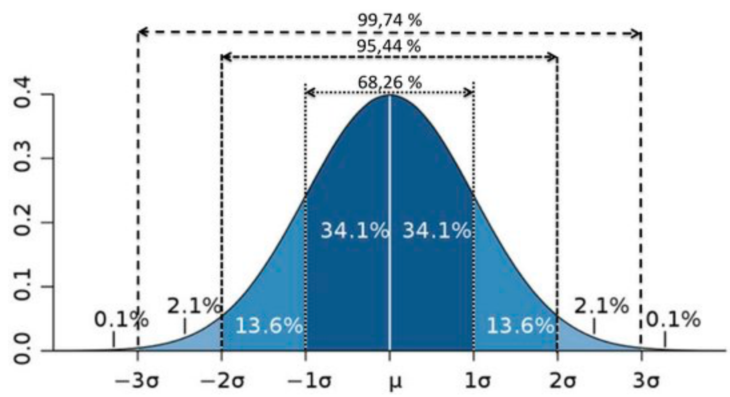
Notons que nous pouvons aussi l'expliquer en prenant en considération que :

$2\, F(a) - 1 = 0{,}95$

C'est-à-dire $F(a) = 0.975$

Et dans la table statistique, nous trouverons que $a = 1.96$

Les intervalles de confiance



Exercice 21

Un gestionnaire a noté que la force de la compression d'un robot correspond à une variable aléatoire X qui suit une loi normale $X \sim \mathcal{N}(6\ ,\ 3)$ / $\mu_x=6$ et $\sigma_x=3$

- Quelle est la probabilité que la force de compression soit comprise entre 3 et 9 ?
- Quel est l'intervalle centré autour de la moyenne qui contient exactement 95% des valeurs de la variable X ?
- Y est une variable aléatoire qui suit une loi normale, $\mu_y=3$ et $\sigma_y=4$. Sachant que $X \sim \mathcal{N}(6\ ,\ 3)$ et Y sont indépendantes, quelle est la loi que suit la variable aléatoire X+Y ?

Solution

La probabilité que la force de compression soit comprise entre 3 et 9 est :

$$
\begin{aligned}
P(3 \le X \le 9) &= P\left(((3-6)/3) \le ((X-6)/3) \le ((9-6)/3)\right) \\
&= P(-1 \le Z \le 1) \\
&= F_z(1) - F_z(-1) \\
&= F_z(1) - (1 - F_z(1)) \\
&= 2\,F_z(1) - 1 \\
&= 2\,(0.8413) - 1 \\
&= 0.6826
\end{aligned}
$$

L'intervalle centré autour de la moyenne qui contient exactement 95% des valeurs de cette variable est défini par les limites :

$$[\ 0.12 \sim 11.88\ ]$$

Y est une variable aléatoire qui suit une loi normale, $\mu_y=3$ et $\sigma_y=4$.

Sachant que $X \sim \mathcal{N}(6\ ,\ 3)$ et Y sont indépendantes, X+Y suit la loi normale $\mathcal{N}(\ 9\ ,\ 5)$ / $\mu_{x+y}=9$ et $\sigma_{x+y}=5$.

En prenant en considération que :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 3+6 = 9$$

$$V(X+Y) = VX) + V(Y) = 9+16 = 25$$

Exercice 22

Une population d'étudiants admet une variable aléatoire X qui représente leur taille et suit une loi normale de moyenne 175 cm et de variance 25 cm^2.

Quel est intervalle centré autour de la moyenne contient 95% des valeurs de cette variable X ?

Solution

$X \sim \mathcal{N}(175 , 5)$

En prenant en considération $Z = (X - 175)/5)$, nous avons $Z \sim \mathcal{N}(0 , 1)$

L'intervalle centré autour de la moyenne contient qui 95% des valeurs de cette variable X est :

$\mu \pm 1.96\ \sigma = 175 \pm (1.96 \text{ x } 5)$

$= [165.2 ; 184.8]$

Bonus ! L'intervalle centré autour de la moyenne contient qui contient 95.44% des valeurs de X est

$[165 ; 185]$ / $(\mu \pm 2\ \sigma = 175 \pm (2 \text{ x } 5)$)

L'intervalle centré autour de la moyenne contient qui contient 68.26% des valeurs de X est : $[170 ; 180]$ / $(\mu \pm \sigma = 175 \pm 5)$

Exercice 23

La durée de vie d'une ampoule suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.04$. Lors d'un contrôle de qualité, elle fonctionne toujours au bout de 11 mois.

- Quelle était a priori la probabilité de cet événement ?
- Quelle est la probabilité que l'ampoule fonctionne encore 12 mois ?

Solution

X suit une loi exponentielle $X \sim \mathcal{E}(0.04)$

A partir du début de son utilisation, l'ampoule fonctionne toujours au bout 11 mois. La probabilité de cet événement est :

$$P(X > 11) = 1 - P(X \leq 11)$$
$$= 1 - F(11)$$
$$= 1 - (1 - e^{-(0.04 \times 11)})$$
$$= e^{-0.44}$$
$$= 0{,}6440$$

Ceci dit, il y avait 64.40% de chance qu'à partir du début de son utilisation elle fonction *au moins* 11 mois.

En utilisant la propriété de non-vieillissement, la probabilité que l'ampoule fonctionne encore 12 mois est :

$$P(X > 11 + 12 / X > 11) = P((X > 11+12) \cap P(X > 11)) / P(X > 11)$$
$$= P(X > 11 + 12) / P(X > 11)$$
$$= P(X > 12)$$
$$= e^{-12 \times 0.04}$$
$$= e^{-048}$$
$$= 0.6188$$

Ou bien

$P(X > 11 + 12 / X > 11) = P(X > 23) / P(X > 11)$

Sachant que $P(X > 23) = 1 - (1 - e^{-23 \times 0.04})$

$$= e^{-0.92}$$
$$= 0.3985$$

Et $P(X > 11) = 0{,}6440$

Dans ce cas $P(X > 11 + 12 / X > 11) = 0.3985 / 0.6440 = 0.6188$

Ceci dit, on a 61.88% de chance que l'ampoule fonctionne encore 12 mois.

Exercice 24

Sachant que la durée de vie d'un ordinateur est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec un écart-type σ_x=2.

- Calculez λ
- Calculez E(X)

Solution

$\lambda = 1/2$

$E(X) = 2$

Exercice 25

Une entreprise garantie ses ordinateurs pour une durée de 2 ans et sachant que cette durée de vie suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda=0.25$.

Lors d'un contrôle, un ordinateur fonctionne toujours au bout de 2 ans, depuis son utilisation.

- Quelle est la probabilité qu'il fonctionne encore 7 ans ?

Solution

La probabilité qu'il fonctionne encore 7 ans est égale a :

$$P(X > 2 + 7 / X > 2) = P((X > 9) \cap P(X > 2)) / P(X > 2)$$
$$= P(X > 9) / P(X > 2)$$
$$= 0.1054 / 0.6065$$
$$= 0.1738$$

Ou bien, en appliquant la propriété de non-vieillissement :

$$P(X > 2 + 7 / X > 2) = P(X > 7)$$
$$= e^{-0.25 \times 7}$$
$$= 0.1738$$

Exercice 26

La durée de vie d'une clé USB suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/24$. Lors d'un contrôle de qualité, la clé fonctionne toujours au bout de 8 mois.

- Quelle était a priori la probabilité de cet événement ?
- Quelle est la probabilité pour que la clé fonctionne encore 4 mois ?

Solution

X suit une loi exponentielle X~ $\mathcal{E}$(1/24), la probabilité que la clé fonctionne toujours au bout de 8 mois est :

$P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8)$

$= 1 - F(8)$

$= 1 - (1 - e^{-8/24})$

$= e^{-1/3}$

$= 0.7165$

Donc il y avait 71.65% de chance qu'à partir du début de l'utilisation de la clé elle fonction au moins 8 mois.

La probabilité pour que la clé fonctionne encore 4 mois est égale à :

$P(X > 8+4 / X > 8) = P(X > 8+4) \cap P(X > 8) / P(X > 8)$

$= P(X > 8+4) / P(X > 8)$

Sachant que $P(X > 12) = 1 - (1 - e^{-12/24})$

$= e^{-1/2}$

$=0,6065$

$P(X > 8+4 / X > 8) = 0,6065/0,7165$

$= 0,8465$

La clé a 84.65% de chance de fonctionner encore au moins 4 mois.

Exercice 27

Sachant que la durée de vie d'une clé USB suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/5$ et que lors d'un contrôle de qualité, la clé fonctionne toujours au bout de 10 mois.

- Quelle est la probabilité de cet événement ? C'est-à-dire qu'à partir du début de l'utilisation de la clé elle fonctionne au *moins* 10 mois.
- Interprétez le résultat.

Solution

X suit une loi exponentielle : X~ $\mathcal{E}$(1/5) ou bien : X~ $\mathcal{E}$(0.2)

La probabilité que la clé fonctionne au *moins* 10 mois est égale à $P(X \geq 10)$.

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 10) &= 1 - P(X < 10) \\
&= 1 - P(X \leq 10) \\
&= 1 - F(10) \\
&= 1 - (1 - e^{-2}) \\
&= e^{-2} \\
&= 0{,}1353
\end{aligned}
$$

Ceci dit, il y avait 13.53% de chance qu'à partir du début de l'utilisation de la clé USB elle fonction au moins 10 mois.

Exercice 28

Sachant que la durée de vie d'une ampoule est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.05$:

- Calculez l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X.
- Lors d'un contrôle de la qualité, l'ampoule ne fonctionne plus au bout de 7 mois, quelle était a priori la probabilité de cet événement ?
- Interprétez le résultat.

Solution :

L'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X :

$$E(X) = 1/0.05 = 20$$

$$V(X) = 1/(0.05)^2 = 400$$

Lors d'un contrôle de la qualité, une ampoule ne fonctionne plus au bout de 7 mois, la probabilité de cet événement est $P(X \leq 7)$:

Sachant que X suit une loi exponentielle : $X \sim \mathcal{E}(0.05)$

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 7) &= F(7) \\
&= 1 - e^{-0.35} \\
&= 0{,}2953
\end{aligned}
$$

Ceci dit, il y avait 29.53% de chance que l'ampoule ne fonctionne plus au bout de 7 mois.

QCM corrigées

Questions à choix multiples

s

Série 1

Une entreprise japonaise a fabriqué 20 téléphones portables, avec une application pour Chat GPT. Elle a décidé de les tester et les soumettre à un contrôle. Un gestionnaire suppose que 25% des portables sont bons (B) et 75% sont défectueux (D).

On considère la variable aléatoire X qui associe (1) à un portable choisi au hasard s'il est *bon* et lui associe (0) s'il est *défectueux*.

1. **Le gestionnaire choisit *un* portable au hasard, la loi que suit la variable aléatoire X est la :**
   (A) loi de Bernoulli, $X \sim \mathscr{B}(25)$ et $X(\Omega) = \{0 , 1\}$
   (B) loi de Bernoulli, $X \sim \mathscr{B}(0.25)$ et $X(\Omega) = \{0 , 1\}$
   (C) loi de Bernoulli, $X \sim \mathscr{B}(0.75)$ et $X(\Omega) = \{0 , 1\}$
   (D) loi Binomiale, $X \sim \mathscr{B}(1, 0.25)$ et $X(\Omega) = \{B , D\}$
   (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

2. **Le gestionnaire choisit *un* portable au hasard, la valeur de la variance de la variable aléatoire X est égale à :**
   (A) $\sigma^2_x = 0.1875$
   (B) $\sigma^2_x = 0.2500$
   (C) $\sigma^2_x = 0.4430$
   (D) $\sigma^2_x = 0.7500$
   (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

3. **Le gestionnaire choisit un portable au hasard et répète l'expérience *plusieurs fois avec remise.* Il observe X une variable aléatoire qui représente le nombre de tirages nécessaire pour obtenir pour la première fois un portable qui est *bon*. L'ensemble des réalisations X(Ω) est égal à :**
   (A) $X(\Omega) = \{0 , 1\}$
   (B) $X(\Omega) = \{B , D\}$
   (C) $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5\}$
   (D) $X(\Omega) = \{1,2,3,4,5......\}$
   (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

4. **Le gestionnaire décide de répéter une expérience aléatoire plusieurs fois. Il choisit successivement 5 portables au hasard *avec remise*. La variable aléatoire X qui représente le nombre de portables qui sont *bons* suit la loi :**
   (A) de Bernoulli, $X \sim \mathscr{B}(0.25)$; $X(\Omega) = \{0,1\}$ et $E(X) = 1.25$
   (B) Binomiale, $X \sim \mathscr{B}(5, 0.25)$; $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5\}$ et $E(X) = 1.75$
   (C) Binomiale, $X \sim \mathscr{B}(5, 0.25)$; $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5\}$ et $E(X) = 1.25$
   (D) Hypergéométrique, $X \sim \mathscr{H}(20, 5, 0.25)$; $X(\Omega) = \{1,2,3,4,5\}$ et $E(X) = 1.25$
   (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

5. ***En prenant en considération la réponse à la question 4*, parmi ces 5 portables choisis successivement au hasard, *avec remise*, il trouve 3 portables défectueux. La probabilité de cet événement :**
   (A) est égale 0.0264
   (B) est égale 0.0625
   (C) est égale 0.2637
   (D) ne peut pas être calculée dans ce cas.
   (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

6. **Le gestionnaire décide de répéter l'expérience aléatoire plusieurs fois, mais cette fois-ci il choisit successivement 7 portables au hasard, *sans remise*. Dans ce cas, une variable aléatoire X qui représente le nombre de portables *qui sont bons* suit la loi Hypergéométrique :**
   (A) $X \sim \mathscr{H}(20, 7, 0.25)$ et $X(\Omega) = \{1,2,3,4,5\}$ et $V(X) = 0.94$
   (B) $X \sim \mathscr{H}(20, 7, 0.25)$ et $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5\}$ et $V(X) = 0.90$
   (C) $X \sim \mathscr{H}(20, 7, 0.25)$ et $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ et $V(X) = 0.90$
   (D) $X \sim \mathscr{H}(20, 5, 0.75)$ et $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ et $V(X) = 0.94$
   (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

7. **Parmi ces 7 ordinateurs choisis successivement au hasard *sans remise*, la probabilité d'avoir 7 portables *qui sont défectueux* :**
   (A) est égale à 0.0830
   (B) est égale à 0.1335
   (C) est égale à 1.0000
   (D) ne peut pas être calculée dans ce cas.
   (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

8. Supposant que le gestionnaire décide de choisir un portable au hasard et de répéter l'expérience *avec remise* n fois. Si une variable aléatoire X représente le nombre de portables *qui sont bons* suit la loi de Poisson de paramètre λ et V(X) = 25 ; dans ce cas :

(A) n = 75 et X(Ω) = {1,2,3,4,5…..}

(B) n = 25 et X(Ω) = {0,1,2,3,4,5…..}

(C) n = 100 et X(Ω) = {0,1,2,3,4,5….. }

(D) n = 500 et X(Ω) = {0,1,2,3,4,5….. }

(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

9. *Supposant* que le gestionnaire a noté qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme discrète sur un ensemble {1,2,3,4,5}**; dans ce cas la probabilité P(X = x) est égale à :**

(A) 0.15

(B) 0.20

(C) 0.25

(D) 0.75

(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

10. Le gestionnaire choisit au hasard un portable et répète l'expérience plusieurs fois *avec remise*, jusqu'à ce qu'il obtienne pour *la première fois* un portable qui est bon. Une variable aléatoire X qui représente le nombre de répétitions de l'expérience jusqu'à ce que le gestionnaire obtienne pour *la première fois un* portable qui est bon suit la loi :

(A) de Pascal X ~ $\mathscr{P}$(5, 0.2) et P(X > 2) = 0.5625

(B) Géométrique X ~ $\mathscr{G}$(0.25) et P(X > 2) = 0.4375

(C) Géométrique X ~ $\mathscr{G}$(0.25) et P(X > 2) = 0.5625

(D) Géométrique X ~ $\mathscr{G}$(0.75) et P(X > 2) = 0.5625

(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

11. En prenant en considération la question 10 et la variable aléatoire X qui représente le nombre de répétitions de l'expérience, *avec remise,* jusqu'à ce que le gestionnaire obtienne pour *la première fois* un portable qui est bon, la probabilité d'obtenir ce portable (*qui est bon*) au bout de 2 essais est égale à :

(A) 0.1875

(B) 0.4375

(C) 0.5625

(D) 1.0000

(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

12. Supposant que le gestionnaire décide de répéter la même expérience plusieurs fois *avec remise*, jusqu'à ce qu'il obtienne 2 portables qui *sont bons*. En prenant en considération une variable aléatoire Y qui représente le nombre de répétitions de l'expérience jusqu'à ce que le gestionnaire obtienne ces 2 portables qui sont bons ; La probabilité d'obtenir ces 2 portables (*qui sont bons*) au bout de 5 essais est égale à :

(A) 0.0625
(B) 0.1055
(C) 0.4219
(D) 0.4375
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

13. En prenant en considération la variable Y, son espérance mathématique est égale à :

(A) E(Y) = 8
(B) E (Y) = 12
(C) E (Y) = 20
(D) E (Y) = 24
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

14. L'entreprise dispose de 3 usines U1, U2 et U3 qui produisent respectivement 70%, 10% et 20% de la production des portables qui peuvent être bons ou défectueux. De cette production 95%, 97% des portables sont bons et proviennent respectivement de l'usine U1 , U2. Sachant qu'e*n total* 4% des portables sont défectueux, l'usine U_3 produit :

(A) 1.00% d'ordinateurs défectueux.
(B) 2.00% d'ordinateurs défectueux.
(C) 3.00% d'ordinateurs défectueux.
(D) 4.00% d'ordinateurs défectueux.
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

15. En prenant en considération la question 14, *en total* le pourcentage des portables qui sont bons est égal à :

(A) 97.00%
(B) 98.00%
(C) 99.00%
(D) 100.00%
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

16. Une machine dans l'usine U1 est composée de deux composants A et B. La probabilité d'une panne du composant A est de 0.20, la probabilité d'une panne du composant B si A est en panne est de 0.50 et la probabilité d'une panne du composant B si A *n*'est *pas* en panne est de 0.40. Dans ce cas, la probabilité d'une panne du composant B est égale à :

(A) 3.20 %
(B) 22.00%
(C) 42.00%
(D) 80.00%
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

17. Sachant que l'entreprise garantie ses portables pour une durée de 2 ans et que la durée de vie d'un portable produit par l'usine U2 suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0.50 Lors d'un contrôle, un portable fonctionne toujours au bout de deux ans, à partir du début de son utilisation. La probabilité qu'il fonctionne *encore* 2 ans est égale à :

(A) 0.1353
(B) 0.3679
(C) 0.6065
(D) 0.8647
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

18. Dans l'usine U3, le gestionnaire a noté que la force de la compression d'un robot correspond à une variable aléatoire X qui suit une loi normale, $X \sim N(5, 2)$; $\mu_x = 5$ et $\sigma_x = 2$. Sachant que $F_Z(1) = 0.8413$, $F_Z(2) = 0.9772$, $F_Z(3) = 0.9987$ pour une variable aléatoire $Z \sim N(0, 1)$, la probabilité que la force de la compression soit comprise entre 3 et 9 est de :

(A) 0.6826
(B) 0.8185
(C) 0.9544
(D) 0.9974
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

19. Sachant que dans l'usine U3 la force de la compression du robot correspond à une variable aléatoire X qui suit une loi normale $X \sim N(5, 2)$, l'intervalle *centré autour de la moyenne* qui contient *exactement* 95.00% des valeurs de cette variable est défini par les limites :

(A) [1.08 ~ 8.92]
(B) [3.04 ~ 6.96]
(C) [2.08 ~ 8.00]
(D) [-2.84 ~ 12.84]
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

20. Le gestionnaire choisit successivement 2 ordinateurs au hasard. Pour chacun il vérifie s'il est bon ou défectueux. A est un événement aléatoire : obtenir *au plus* un ordinateur qui est bon. La probabilité de l'événement A est égale à :

(A) P(A) = 1/4
(B) P(A) = 2/4
(C) P(A) = 3/4
(D) P(A) = 1.00
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

Série 2

Une entreprise japonaise a fabriqué 15 téléphones portables, avec une technologie de charge ultra rapide pour les expérimenter. Elle a décidé de les soumettre à un contrôle. Un gestionnaire suppose que 80% des portables sont bons (B) et 20% sont défectueux (D).

On considère la variable aléatoire X qui associe (1) à un portable choisi au hasard s'il est *défectueux* et lui associe (0) s'il est *bon*.

1. **Le gestionnaire choisit *un* portable au hasard, la loi que suit la variable aléatoire X est la :**
   (A) loi de Bernoulli, $X \sim \mathscr{B}(0.2)$ et $X(\Omega) = \{0 , 1\}$
   (B) loi de Bernoulli, $X \sim \mathscr{B}(0.8)$ et $X(\Omega) = \{0 , 1\}$
   (C) loi de Bernoulli, $X \sim \mathscr{B}(0.2)$ et $X(\Omega) = \{B , D\}$
   (D) loi Binomiale, $X \sim \mathscr{B}(1, 0.2)$ et $X(\Omega) = \{B , D\}$
   (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

2. **Le gestionnaire choisit *un* portable au hasard, la valeur de l'écart-type de la variable aléatoire X est égale à :**
   (A) $\sigma_x = 0.2$
   (B) $\sigma_x = 0.4$
   (C) $\sigma_x = 0.8$
   (D) $\sigma_x = 0.16$
   (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

3. **Le gestionnaire choisit au hasard un portable et répète l'expérience plusieurs fois *avec remise.* Il observe X la variable aléatoire qui représente le nombre de tirages nécessaire pour obtenir pour la première fois un portable *défectueux*. L'ensemble des réalisations X(Ω) est égal à :**
   (A) $X(\Omega) = \{0 , 1\}$
   (B) $X(\Omega) = \{B , D\}$
   (C) $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$
   (D) $X(\Omega) = \{1,2,3,4,5......\}$
   (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

4. **Le gestionnaire décide de répéter une expérience aléatoire plusieurs fois. Il choisit successivement 4 portables au hasard *avec remise*. La variable aléatoire X qui représente *le nombre de portables défectueux* suit la loi :**
   (A) Binomiale, $X \sim \mathscr{B}(4, 0.2)$; $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$ et $E(X) = 0.064$
   (B) Binomiale, $X \sim \mathscr{B}(4, 0.2)$; $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4\}$ et $E(X) = 0.80$
   (C) Hypergéométrique, $X \sim \mathscr{H}(15,4, 0.2)$; $X(\Omega) = \{1,2,3,4,.....\}$ et $E(X) = 0.064$
   (D) Hypergéométrique, $X \sim \mathscr{H}(15,4, 0.9)$; $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,.....\}$ et $E(X) = 0.064$
   (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

5. ***En prenant en considération la réponse à la question 4*, parmi ces 4 portables choisis successivement au hasard, *avec remise*, il ne trouve aucun portable défectueux. La probabilité de cet événement est égale à :**
   (A) 0.0881
   (B) 0.1074
   (C) 0.2000
   (D) 0.4096
   (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

6. **Le gestionnaire décide de répéter l'expérience aléatoire plusieurs fois, mais cette fois-ci il choisit successivement 5 portables au hasard, *sans remise*. Dans ce cas, une variable aléatoire X qui représente le nombre de portables *défectueux* suit la loi :**
   (A) Hypergéométrique, $X \sim \mathscr{H}(5, 3, 0.2)$ et $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$
   (B) Hypergéométrique, $X \sim \mathscr{H}(5, 3, 0.8)$ et $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$
   (C) Hypergéométrique, $X \sim \mathscr{H}(15, 5, 0.2)$ et $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$
   (D) Hypergéométrique, $X \sim \mathscr{H}(15, 5, 0.2)$ et $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5\}$
   (E) Hypergéométrique, $X \sim \mathscr{H}(15, 5, 0.2)$ et $X(\Omega) = \{0,1,2,\ldots.15\}$

7. **Parmi ces 5 ordinateurs choisis successivement au hasard *sans remise*, la probabilité d'avoir 2 ordinateurs *qui sont bons* :**
   (A) est égale à 0.0051
   (B) est égale à 0.0220
   (C) est égale à 0.0833
   (D) ne peut pas être calculée dans ce cas.
   (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

8. **Supposant que le gestionnaire décide de choisir un portable au hasard et de répéter l'expérience *avec remise* n fois. Si une variable aléatoire X représente le nombre de portables *défectueux* suit la loi de Poisson de paramètre λ et V(X) = 25 ; dans ce cas :**
   (A) n = 125 et X(Ω) = {0,1,2,3,…..}
   (B) n = 375 et X(Ω) = {0,1,2,3,…..}
   (C) n = 125 et X(Ω) = {0,1,2,3,…..125}
   (D) n = 100 et X(Ω) = {0,1,2,3,…..100}
   (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

9. ***Supposant* que le gestionnaire a noté qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme discrète sur un ensemble** {1,2,3,4}**; dans ce cas la probabilité P(X = x) est égale à :**
   (A) 0.10
   (B) 0.15
   (C) 0.20
   (D) 0.25
   (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

10. **Le gestionnaire choisit au hasard un portable et répète l'expérience plusieurs fois *avec remise*, jusqu'à ce qu'il obtienne pour *la première fois* un portable défectueux. Une variable aléatoire X qui représente le nombre de répétitions de l'expérience jusqu'à ce que le gestionnaire obtienne pour *la première fois un* portable défectueux suit la loi :**
    (A) Géométrique $X \sim \mathscr{G}(0.2)$ et $P(X > 2) = 0.36$
    (B) Géométrique $X \sim \mathscr{G}(0.8)$ et $P(X > 2) = 0.67$
    (C) Géométrique $X \sim \mathscr{G}(0.2)$ et $P(X > 2) = 0.64$
    (D) Géométrique $X \sim \mathscr{G}(0.2)$ et $P(X > 2) = 0.67$
    (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

11. **En prenant en considération la question 10 et la variable aléatoire X qui représente le nombre de répétitions de l'expérience, *avec remise,* jusqu'à ce que le gestionnaire obtienne pour *la première fois* un portable défectueux, la probabilité d'obtenir ce portable défectueux au bout de 3 essais est égale à :**
    (A) 0.0080
    (B) 0.1280
    (C) 0.4880
    (D) 0.5120
    (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

12. Supposant que le gestionnaire décide de répéter la même expérience plusieurs fois *avec remise*, jusqu'à ce qu'il obtienne 3 portables défectueux. En prenant en considération une variable aléatoire Y qui représente le nombre de répétitions de l'expérience jusqu'à ce que le gestionnaire obtienne ces 3 portables défectueux ; La probabilité d'obtenir ces 3 portables défectueux au bout de 5 essais est égale à :

(A) 0.0051
(B) 0.0307
(C) 0.0512
(D) 0.1229
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

13. En prenant en considération la variable Y, sa variance est égale à :

(A) V(Y) = 15
(B) V(Y) = 25
(C) V(Y) = 60
(D) V(Y) = 100
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

14. L'entreprise dispose de 3 usines U1, U2 et U3 qui produisent respectivement 60%, 30% et 10% de la production des portables qui peuvent être bons ou défectueux. De cette production 85%, 80%, 90% des portables sont bons et proviennent respectivement de l'usine U1 , U2 et U3. *En total* le pourcentage des portables qui sont défectueux est égal à :

(A) 16.00%.
(B) 37.75%.
(C) 45.00%.
(D) 84.00%.
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

15. En prenant en considération la question 14, *en total* le pourcentage des portables qui sont bons est égal à :

(A) 16.00%
(B) 55.00%
(C) 65.00%
(D) 100.00%
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

16. Une machine dans l'usine U1 est composée de deux composants A et B. La probabilité d'une panne du composant A est de 0.10, la probabilité d'une panne du composant B si A est en panne est de 0.25 et la probabilité d'une panne du composant B si A *n*'est *pas* en panne est de 0.20. Dans ce cas, la probabilité d'une panne du composant B est égale à :

(A) 12.00%
(B) 20.50%
(C) 25.00%
(D) 72.50%
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

17. Sachant que l'entreprise garantie ses portables pour une durée de 2 ans et que la durée de vie d'un portable produit par l'usine U2 suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda =$ 0.50 Lors d'un contrôle, un portable fonctionne toujours au bout de deux ans, à partir du début de son utilisation. La probabilité qu'il fonctionne *encore* 1 an est égale à :

(A) 0.3679
(B) 0.3935
(C) 0.6065
(D) 0.9179
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

18. Dans l'usine U3, le gestionnaire a noté que la force de la compression d'un robot correspond à une variable aléatoire X qui suit une loi normale, $X \sim N(4, 2)$; $\mu_x = 4$ et $\sigma_x = 2$. Sachant que $F_z(1) = 0.8413$, $F_z(2) = 0.9772$, $F_z(3) = 0.9987$ pour une variable aléatoire $Z \sim N(0, 1)$, la probabilité que la force de la compression soit comprise entre 0 et 8 est de :

(A) 0.6826
(B) 0.9500
(C) 0.9544
(D) 0.9974
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

19. Sachant que dans l'usine U3 la force de la compression du robot correspond à une variable aléatoire X qui suit une loi normale $X \sim N(4, 2)$, l'intervalle *centré autour de la moyenne* qui contient *exactement* 95.00% des valeurs de cette variable est défini par les limites :

(A) [2.00 ~ 6.00]
(B) [2.00 ~ 8.00]
(C) [0.08 ~ 7.92]
(D) [-3.84 ~ 11.84]
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

20. Le gestionnaire a aussi noté que la force de la compression d'un autre robot dans l'usine U1 correspond à une variable aléatoire Y qui suit une loi normale de paramètre $\mu_y = 2$ et $\sigma_y = 1$. Y ~ N (2 , 1), la variable aléatoire 5Y suit une loi normale :

(A) 5Y ~ **N** (5, 5) ; $\mu_{5y} = 5$ et $\sigma_{5y} = 5$
(B) 5Y ~ **N** (2, 1) ; $\mu_{5y} = 10$ et $\sigma_{5y} = 1$
(C) 5Y ~ **N** (10, 5) ; $\mu_{5y} = 10$ et $\sigma_{5y} = 5$
(D) 5Y ~ **N** (10, 25) ; $\mu_{5y} = 10$ et $\sigma_{5y} = 25$
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

Série 3

Une entreprise japonaise a fabriqué 20 téléphones portables avec une technologie 6G pour les expérimenter s'ils sont plus rapides que la 5G. Elle a décidé de les soumettre à un contrôle. Un gestionnaire suppose que 90% des portables sont bons (B) et 10% sont défectueux (B).
On considère la variable aléatoire X qui associe (1) à un portable choisi au hasard s'il est *défectueux* et lui associe (0) s'il est bon.

1. **Le gestionnaire choisit successivement 5 portables au hasard. Pour chacun, il vérifie s'il est bon (B) ou défectueux (D). L'univers des possibles Ω contient :**
   (A) 10 issues possibles.
   (B) 16 issues possibles.
   (C) 32 issues possibles.
   (D) 100 issues possibles.
   (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

2. **Le gestionnaire choisit *un* portable au hasard, la loi que suit la variable aléatoire X est la :**
   (A) loi de Bernoulli, $X \sim \mathscr{B}(0.1)$ et $X(\Omega) = \{0 , 1\}$
   (B) loi de Bernoulli, $X \sim \mathscr{B}(0.9)$ et $X(\Omega) = \{0 , 1\}$
   (C) loi de Bernoulli, $X \sim \mathscr{B}(0.1)$ et $X(\Omega) = \{B , D\}$
   (D) loi de Bernoulli, $X \sim \mathscr{B}(0.9)$ et $X(\Omega) = \{B , D\}$
   (E) loi Binomiale, $X \sim \mathscr{B}(1, 0.1)$ et $X(\Omega) = \{B , D\}$

3. **Le gestionnaire choisit *un* portable au hasard, la valeur de l'écart-type de la variable aléatoire X est égale à :**
   (A) $\sigma_x = 0.1$
   (B) $\sigma_x = 0.3$
   (C) $\sigma_x = 0.01$
   (D) $\sigma_x = 0.09$
   (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

4. **Le gestionnaire décide de répéter l'expérience aléatoire plusieurs fois. Il choisit "n" portables au hasard *avec remise*. La variable aléatoire X qui représente *le nombre de portables défectueux* avec E(X) = 1.00 suit la loi :**
   (A) Binomiale, $X \sim \mathscr{B}(10, 0.1)$ et $X(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
   (B) Binomiale, $X \sim \mathscr{B}(10, 0.9)$ et $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
   (C) Binomiale, $X \sim \mathscr{B}(10, 0.1)$ et $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
   (D) Binomiale, $X \sim \mathscr{B}(90, 0.1)$ et $X(\Omega) = \{0,1,2,....................,90\}$
   (E) Hypergéométrique, $X \sim \mathscr{H}(20,10, 0.1)$ et $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,.....\}$

5. ***En prenant en considération la réponse à la question 4*, parmi ces portables choisis au hasard, *avec remise*, il ne trouve aucun portable défectueux. La probabilité de cet événement est égale à :**
(A) 0.1000
(B) 0.3487
(C) 0.9000
(D) 0.9348
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

6. **Le gestionnaire décide de répéter l'expérience aléatoire plusieurs fois, mais cette fois-ci il choisit 3 portables au hasard, *sans remise*. Dans ce cas, une variable aléatoire X qui représente le nombre de portables *défectueux* suit la loi :**
(A) Hypergéométrique, $X \sim \mathscr{H}(20, 3, 0.1)$ et $X(\Omega) = \{0,1,2\}$
(B) Hypergéométrique, $X \sim \mathscr{H}(20, 3, 0.9)$ et $X(\Omega) = \{0,1,2\}$
(C) Hypergéométrique, $X \sim \mathscr{H}(3, 2, 0.1)$ et $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$
(D) Hypergéométrique, $X \sim \mathscr{H}(20, 3, 0.1)$ et $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$
(E) Hypergéométrique, $X \sim \mathscr{H}(20, 2, 0.1)$ et $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$

7. **En prenant en considération *la réponse à la question 6*, la valeur de l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est égale à :**
(A) 0.24
(B) 0.27
(C) 0.30
(D) 0.90
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

8. **Supposant que le gestionnaire décide de choisir un portable au hasard et de répéter l'expérience *avec remise* n fois. Si la variable aléatoire X qui représente le nombre de portables *défectueux* suit la loi de Poisson de paramètre λ et V(X) = 5 ; dans ce cas :**
(A) n = 5
(B) n = 10
(C) n = 50
(D) n = 100
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

9. ***Supposant* que le gestionnaire a noté qu'une variable aléatoire Y suit la loi uniforme discrète sur un ensemble** $X(\Omega) = \{1,2,3,4,5\}$**; dans ce cas la probabilité P(X = x) est égale à :**
   (A) 0.10
   (B) 0.20
   (C) 0.30
   (D) 0.40
   (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

10. **Supposant que le gestionnaire décide de répéter l'expérience *avec remise*, jusqu'à ce qu'il obtienne pour *la première fois* un portable défectueux. La variable aléatoire X qui représente le nombre de répétitions de l'expérience jusqu'à ce que le gestionnaire obtienne pour *la première fois un* portable défectueux suit la loi :**
    (A) Exponentielle $X \sim \mathscr{E}(0.1)$, $X(\Omega) = \{1,2,3,.....\}$
    (B) Exponentielle $X \sim \mathscr{E}(0.9)$, $X(\Omega) = \{1,2,3,.....\}$
    (C) Géométrique $X \sim \mathscr{G}(0.1)$, $X(\Omega) = \{0,1,2,3,....\}$
    (D) Géométrique $X \sim \mathscr{G}(0.1)$, $X(\Omega) = \{1,2,3,.......\}$
    (E) Géométrique $X \sim \mathscr{G}(0.9)$, $X(\Omega) = \{1,2,3,.......\}$

11. **En prenant en considération la variable aléatoire X qui représente le nombre de répétitions de l'expérience, *avec remise,* jusqu'à ce que le gestionnaire obtienne pour *la première fois* un portable défectueux, la probabilité d'obtenir ce portable défectueux au bout de 3 essais *ou moins* est égale à :**
    (A) 0.001
    (B) 0810
    (C) 0.271
    (D) 0.729
    (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

12. **Supposant que le gestionnaire décide de répéter cette expérience plusieurs fois *avec remise*, jusqu'à ce qu'il obtienne 5 portables défectueux. Une variable aléatoire X qui représente le nombre de répétitions de l'expérience jusqu'à ce que le gestionnaire obtienne 5 portables défectueux suit la loi :**
    (A) de Pascal $X \sim \mathscr{P}(5, 0.1)$
    (B) de Pascal $X \sim \mathscr{P}(5, 0.9)$
    (C) Géométrique $X \sim \mathscr{G}(0.1)$
    (D) Binomiale $X \sim \mathscr{B}(5, 0.1)$
    (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

13. En prenant en considération la réponse à la question 12, $X(\Omega)$ **est égal à :**

(A) $X(\Omega) = \{1,2,3,4,5\}$

(B) $X(\Omega) = \{5,6,7,........\}$

(C) $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5\}$

(D) $X(\Omega) = \{1,2,3,4,5........,20\}$

(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

14. L'entreprise dispose de 3 usines U1, U2, U3 qui produisent respectivement 50%, 20%, 30% de la production des portables qui peuvent être bons ou défectueux. De cette production 95%, 97%, des portables sont bons et proviennent respectivement de l'usine U1 , U2.

Sachant que 10% des portables *en total* sont défectueux, l'usine U3 produit :

(A) 2.00% de portables défectueux.

(B) 8.00% de portables défectueux.

(C) 23.00% de portables défectueux.

(D) 30.00% de portables défectueux.

(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

15. En prenant en considération la question 14, *en total* le pourcentage des portables qui sont bons est égal à :

(A) 90.00%

(B) 95.00%

(C) 97.00%

(D) 100.00%

(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

16. Une machine dans l'usine U1 est composée de deux composants A et B. La probabilité d'une panne du composant A est de 0.10, la probabilité d'une panne du composant B si A est en panne est de 0.25 et la probabilité d'une panne du composant B si A *n*'est *pas* en panne est de 0.20. Dans ce cas, la probabilité d'une panne du composant B est égale à :

(A) 0.050

(B) 0.205

(C) 0.450

(D) 0.900

(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

17. Sachant que l'entreprise garantie ses portables pour une durée de 2 ans et que la durée de vie d'un portable produit par l'usine U2 suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0.25 Lors d'un contrôle, un portable fonctionne toujours au bout de 2 ans, à partir du début de son utilisation. La probabilité qu'il fonctionne *encore* 3 ans est égale à :

(A) 0.2865
(B) 0.4724
(C) 0.6065
(D) 0.7788
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

18. Dans l'usine U3, le gestionnaire a noté que la force de la compression d'un robot correspond à une variable aléatoire X qui suit une loi normale, X ~ N (3 , 1) ; $\mu_x = 3$ et $\sigma_x = 1$. Sachant que $F_z(1) = 0.8413$, $F_z(2) = 0.9772$, $F_z(3) = 0.9987$ pour une variable aléatoire Z ~ N (0 , 1) , la probabilité que la force de la compression soit comprise entre 1 et 5 est de :

(A) 0.6826
(B) 0.9500
(C) 0.9544
(D) 0.9974
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

19. Sachant que dans l'usine U3 la force de la compression du robot correspond à une variable aléatoire X qui suit une loi normale X ~ N (3 , 1) , l'intervalle *centré autour de la moyenne* qui contient *exactement* 95.00% des valeurs de cette variable est défini par les limites :

(A) [1.04 ~ 4.96]
(B) [2.00 ~ 4.00]
(C) [0.00 ~ 6.00]
(D) [-1.00 ~ 1.00]
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

20. Le gestionnaire a aussi noté que la force de la compression d'un autre robot dans l'usine U1 correspond à une variable aléatoire Y qui suit une loi normale de paramètre $\mu_y = 3$ et $\sigma_y = 4$. Y ~ N (3 , 4), la variable aléatoire 4Y suit une loi normale :

(A) 4Y ~ **N** (3 , 16) ; $\mu_{4y} = 3$ et $\sigma_{4y} = 16$
(B) 4Y ~ **N** (12 , 10) ; $\mu_{4y} = 12$ et $\sigma_{4y} = 10$
(C) 4Y ~ **N** (12 , 16) ; $\mu_{4y} = 12$ et $\sigma_{4y} = 16$
(D) 4Y ~ **N** (48 , 100) ; $\mu_{4y} = 48$ et $\sigma_{4y} = 100$
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

Série 4

Une multinationale a fabriqué 10 ordinateurs portables avec une technologie 5G pour les tester. Un gestionnaire de la qualité note que 4 ordinateurs sont défectueux et 6 sont bons.

1. **Le gestionnaire choisit successivement 3 ordinateurs au hasard. Pour chacun, il vérifie s'il est bon ou défectueux. L'univers des possibles Ω contient :**
   (A) 3 issues possibles.
   (B) 6 issues possibles.
   (C) 8 issues possibles.
   (D) plusieurs issues non dénombrables.
   (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

2. **En prenant en considération la réponse à la question 1, l'univers des possibles Ω est un ensemble :**
   (A) continu.
   (B) fini discret.
   (C) infini dénombrable.
   (D) infini non dénombrable.
   (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

3. **Le gestionnaire choisit *un ordinateur* au hasard. La probabilité qu'il soit défectueux est égale à :**
   (A) 0.1
   (B) 0.4
   (C) 0.6
   (D) 1.0
   (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

4. **En prenant en considération les 10 ordinateurs, de combien de façons distinctes peut-on les placer tel que, les bons doivent être placés côte à côte et les défectueux côte à côte ?**
   (A) 240 façons.
   (B) 17280 façons.
   (C) 34560 façons.
   (D) 345600 façons.
   (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

5. Le gestionnaire tire au hasard et *successivement* 3 ordinateurs parmi les 10 (*sans remise*). La probabilité de tirer 3 ordinateurs qui sont bons est égale à :

(A) 0.17
(B) 0.30
(C) 0.50
(D) 1.00
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

6. Le gestionnaire tire au hasard et *simultanément* 5 ordinateurs parmi les 10 (*sans remise*). La probabilité de tirer 2 ordinateurs qui sont défectueux est égale à :

(A) 0.05
(B) 0.10
(C) 0.25
(D) 0.48
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

7. Le gestionnaire choisit successivement 2 ordinateurs au hasard. Pour chacun, il vérifie s'il est bon (B) ou défectueux (D). L'univers des possibles est :

(A) $\Omega = \{ 0, 1, 2 \}$
(B) $\Omega = \{ (B, D) \}$
(C) $\Omega = \{ (B, D), (D, B) \}$
(D) $\Omega = \{ (B, B), (B, D), (D, B), (D, D) \}$
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

8. Le gestionnaire choisit successivement 2 ordinateurs au hasard. Pour chacun, il vérifie s'il est bon (B) ou défectueux (D). A *est un événement aléatoire* : obtenir *au plus* un ordinateur qui est bon, donc :

(A) $A = \{ B \}$
(B) $A = \{ (B, D) \}$
(C) $A = \{ (B, B), (B, D), (D, B) \}$
(D) $A = \{ (B, D), (D, B), (D, D) \}$
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

9. L'événement complémentaire $\bar{A}$ ou A^c :

(A) $A^c = \{ D \}$
(B) $A^c = \{ (B, B) \}$
(C) $A^c = \{ (D, B) \}$
(D) $A^c = \{ (D, B), (D, D), (B, B) \}$
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

10. La probabilité de l'événement A est égale à :

(A) 1/4
(B) 2/4
(C) 3/4
(D) 1
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte

11. En prenant en considération A et A^c, la probabilité :

(A) $P(A) + P(A^c) = 0$
(B) $P(A) + P(A^c) = 1$
(C) $P(A) + P(A^c) = 4$
(D) $P(A) + P(A^c) = 0.5$
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

12. A est un événement :

(A) certain.
(B) composé.
(C) impossible.
(D) élémentaire.
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

13. Le gestionnaire choisit successivement 2 ordinateurs au hasard. Pour chacun, il vérifie s'il est bon (B) ou défectueux (D). B *est un événement aléatoire* : obtenir *exactement* un ordinateur qui est bon, donc :

(A) B = { B }
(B) B = { (B, D) }
(C) B = { (B, B) }
(D) B = { (B, D), (D, B) }
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

14. En prenant en considération les événements A et B , on note que :

(A) B implique A
(B) A implique B
(C) A et B sont incompatibles.
(D) A et B forment un système complet d'événements.
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

15. En prenant en considération les événements A et B, la probabilité de leur union est égale à :

(A) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1/4$
(B) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 2/4$
(C) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 3/4$
(D) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) + P(A \cap B) = 3/4$
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

16. En prenant en considération les événements A et B , on note :

(A) $P(A) > P(B)$
(B) $P(A) < P(B)$
(C) $P(A) = P(B)$
(D) qu'on ne peut pas comparer P(A) et P(B).
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

17. Le gestionnaire choisit successivement 2 ordinateurs au hasard. Pour chacun, il vérifie s'il est bon (B) ou défectueux (D). *C est un événement aléatoire* : obtenir *deux* ordinateurs qui sont bons. On peut noter que :

(A) A implique C
(B) C implique A
(C) A et C sont des événements certains.
(D) A et C forment un système complet d'événements.
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

18. On considère deux événements aléatoires A et B, l'union de A et B est égale à :

(A) $A \cup B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)$
(B) $A \cup B = (A \cup B) \cap (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c)$
(C) $A \cup B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B^c)$
(D) $A \cup B = (A \cap B) \cap (A^c \cap B^c) \cap (A \cap B^c)$
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

19. Le gestionnaire dispose de 5 places pour placer 5 ordinateurs, de combien de façons distinctes peut-il les placer (*sans répétition*) ?

(A) 1 façon.
(B) 5 façons.
(C) 25 façons.
(D) 120 façons.
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

20. Le gestionnaire dispose de 3 places pour placer 5 ordinateurs, de combien de façons distinctes peut-il les placer (*sans répétition*) ?

(A) 3 façons.
(B) 5 façons.
(C) 60 façons.
(D) 120 façons.
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

Série 5

Une multinationale a fabriqué 70 ordinateurs portables avec une technologie 5G pour les tester pendant une certaine période. Elle a décidé de les soumettre à un contrôle. Un gestionnaire de la production suppose que 90% des ordinateurs sont défectueux (D) et 10% sont bons (B).
On considère la variable aléatoire X qui associe (0) à un ordinateur choisi au hasard s'il est *défectueux* et lui associe (1) s'il est bon.

1. **Le gestionnaire choisit successivement 7 ordinateurs au hasard. Pour chacun, il vérifie s'il est bon (B) ou défectueux (D). L'univers des possibles Ω contient :**
   (A) 14 issues possibles, Card (Ω) = 14
   (B) 49 issues possibles, Card (Ω) = 49
   (C) 70 issues possibles, Card (Ω) = 70
   (D) 128 issues possibles, Card (Ω) = 128
   (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

2. **Le gestionnaire choisit *un* ordinateur au hasard, la loi que suit la variable aléatoire X est la :**
   (A) loi de Bernoulli, $X \sim \mathscr{B}(0.9)$ et $X(\Omega) = \{0 , 1\}$
   (B) loi de Bernoulli, $X \sim \mathscr{B}(0.1)$ et $X(\Omega) = \{B , D\}$
   (C) loi de Bernoulli, $X \sim \mathscr{B}(0.9)$ et $X(\Omega) = \{B , D\}$
   (D) loi de Bernoulli, $X \sim \mathscr{B}(0.1)$ et $X(\Omega) = \{0 , 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
   (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

3. **Le gestionnaire choisit *un* ordinateur au hasard, l'espérance mathématique et l'écart-type de la variable aléatoire X qui suit une loi de Bernoulli, sont respectivement :**
   (A) $E(X) = 0.1$; $\sigma_x = 0.3$ et $F_x(1) = 0$
   (B) $E(X) = 0.1$; $\sigma_x = 0.3$ et $F_x(1) = 1$
   (C) $E(X) = 0.9$; $\sigma_x = 0.3$ et $F_x(1) = 1$
   (D) $E(X) = 0.1$; $\sigma_x = 0.09$ et $F_x(1) = 0.9$
   (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

4. **Le gestionnaire décide de répéter l'expérience aléatoire plusieurs fois. Il choisit 7 ordinateurs au hasard avec remise. La variable aléatoire X qui représente le nombre d'ordinateurs qui sont bons suit la loi :**
   (A) Binomiale, $X \sim \mathscr{B}(7, 0.1)$ et $X(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $E(X) = 0.7$, $V(X) = 0.63$
   (B) Binomiale, $X \sim \mathscr{B}(7, 0.9)$ et $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, $E(X) = 6.3$, $V(X) = 0.63$
   (C) Binomiale, $X \sim \mathscr{B}(7, 0.9)$ et $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, $E(X) = 0.09$, $V(X) = 0.63$
   (D) Binomiale, $X \sim \mathscr{B}(7, 0.1)$ et $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, $E(X) = 0.09$, $V(X) = 0.63$
   (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

5. **Parmi ces 7 ordinateurs choisis au hasard, *avec remise*, il trouve 6 ordinateurs défectueux. La probabilité de cet événement est égale à :**
(A) 0.0531
(B) 0.1000
(C) 0.3720
(D) 0.5314
(E) 0.5400

6. **Le gestionnaire décide de répéter l'expérience aléatoire plusieurs fois, mais cette fois-ci il choisit 8 ordinateurs au hasard, *sans remise*. Dans ce cas, une variable aléatoire X qui représente le nombre d'ordinateurs *qui sont bons* suit la loi :**
(A) Hypergéométrique, $X \sim \mathscr{H}(70, 8, 0.1)$ et $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, $E(X) = 0.8$
(B) Hypergéométrique, $X \sim \mathscr{H}(70, 8, 0.1)$ et $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, $E(X) = 0.09$
(C) Hypergéométrique, $X \sim \mathscr{H}(70, 8, 0.1)$ et $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $E(X) = 0.8$
(D) Hypergéométrique, $X \sim \mathscr{H}(70, 8, 0.9)$ et $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $E(X) = 0.09$
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

7. **Parmi ces 8 ordinateurs choisis au hasard *sans remise*, la probabilité d'avoir 7 ordinateurs *défectueux* est égale à :**
(A) 0.3582
(B) 0.3826
(C) 0.4102
(D) 0.8013
(E) 1.0000

8. **Supposant que le gestionnaire décide de choisir un ordinateur au hasard et de répéter l'expérience *avec remise* n fois. Si la variable aléatoire X qui représente le nombre d'ordinateurs qui sont *bons* suit la loi de Poisson de paramètre λ et E(X) = 4 ; dans ce cas :**
(A) $n = 16$ et $P(X = 0) = 0.0183$
(B) $n = 40$ et $P(X = 0) = 0.0183$
(C) $n = 40$ et $P(X = 0) = 0.0733$
(D) $n = 280$ et $P(X = 0) = 0.733$
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

9. ***Supposant* que le gestionnaire a noté qu'une autre variable aléatoire Y qui représente le nombre d'ordinateurs qui sont bons suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$; dans ce cas la probabilité d'avoir exactement 2 ordinateurs qui sont bons est égale à :**
   (A) 0.1494 ; sachant que X et Y sont indépendantes, $X+Y \sim \mathscr{P}(7)$
   (B) 0.2240 ; sachant que X et Y sont indépendantes, $X+Y \sim \mathscr{P}(6)$
   (C) 0.2240 ; sachant que X et Y sont indépendantes, $X+Y \sim \mathscr{P}(7)$
   (D) 0.2240 ; sachant que X et Y sont indépendantes, $X+Y \sim \mathscr{P}(12)$
   (E) 0.6090 ; sachant que X et Y sont indépendantes, $X+Y \sim \mathscr{P}(12)$

10. **Supposant que le gestionnaire décide de répéter l'expérience *avec remise*, jusqu'à ce qu'il obtienne pour *la première fois* un ordinateur qui est bon. La variable aléatoire X qui représente le nombre de répétitions de l'expérience jusqu'à ce que le gestionnaire obtienne pour *la première fois un* ordinateur qui est bon suit la loi :**
    (A) Géométrique $X \sim \mathscr{G}(0.9)$, $X(\Omega) = \{1,2,3,........\}$ et $P(X > 3) = 0.2710$
    (B) Géométrique $X \sim \mathscr{G}(0.1)$, $X(\Omega) = \{1,2,3,........\}$ et $P(X > 3) = 0.0010$
    (C) Géométrique $X \sim \mathscr{G}(0.1)$, $X(\Omega) = \{1,2,3,........\}$ et $P(X > 3) = 0.2710$
    (D) Géométrique $X \sim \mathscr{G}(0.1)$, $X(\Omega) = \{1,2,3,........\}$ et $P(X > 3) = 0.7290$
    (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

11. **En prenant en considération la variable aléatoire X qui représente le nombre de répétitions de l'expérience, *avec remise,* jusqu'à ce que le gestionnaire obtienne pour *la première fois* un ordinateur qui est bon, la probabilité d'obtenir cet ordinateur au bout de 4 essais *ou moins* est égale à :**
    (A) 0.0001
    (B) 0.0729
    (C) 0.3439
    (D) 0.4000
    (E) 0.6561

12. **Supposant que le gestionnaire décide de répéter cette expérience plusieurs fois *avec remise*, jusqu'à ce qu'il obtienne "n" ordinateurs qui sont bons. Sachant qu'une variable aléatoire X qui représente le nombre de répétitions de l'expérience jusqu'à ce que le gestionnaire obtienne ces "n" ordinateurs qui sont bons suit la loi de Pascal et que $E(X) = 40$ dans ce cas :**
    (A) n = 4
    (B) n = 10
    (C) n = 36
    (D) n = 400
    (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

13. **En prenant en considération la réponse à la question 12, la probabilité que le gestionnaire obtienne ces "n" ordinateurs qui sont bons au bout de 20 essais est égale à :**
(A) 1.0000
(B) 0.0010
(C) 0.0020
(D) 0.0180
(E) 0.1853

14. **L'entreprise dispose de 3 usines U1, U2 et U3 qui produisent respectivement 30%, 25% et 45% de la production des ordinateurs qui peuvent être bons ou défectueux. De cette production 15%, 20%, 10% des ordinateurs sont défectueux et proviennent respectivement de l'usine U1 , U2 et U3. *En total* le pourcentage des ordinateurs qui sont défectueux est égal à :**
(A) 14.00%
(B) 45.00%
(C) 86.00%
(D) 100.00%
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

15. **Le gestionnaire choisit un ordinateur au hasard, il est bon. La probabilité qu'il soit produit par l'usine U3 est de :**
(A) 0.2400
(B) 0.4050
(C) 0.4709
(D) 0.9000
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

16. **Une machine dans l'usine U1 est composée de deux composants A et B. La probabilité d'une panne du composant A est de 0.30 , la probabilité d'une panne du composant B si A est en panne est de 0.45 et la probabilité d'une panne du composant B si A *n*'est *pas* en panne est de 0.15. Dans ce cas, la probabilité d'une panne du composant B est égale à :**
(A) 0.24
(B) 0.36
(C) 0.60
(D) 0.70
(E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

17. **Sachant que l'entreprise garantie ses ordinateurs pour une durée de 3 ans et que X la durée de vie d'un ordinateur produit par l'usine U1 suit une loi exponentielle avec E(X) = 2 ; lors d'un contrôle, un ordinateur fonctionne toujours au bout de 3 ans, à partir du début de son utilisation. La probabilité qu'il fonctionne *encore* 1 an est égale à :**
    (A) 0.1353
    (B) 0.2231
    (C) 0.3935
    (D) 0.6065
    (E) 0.8647

18. **Dans l'usine U1, le gestionnaire a noté que la force de la compression d'un robot correspond à une variable aléatoire X qui suit une loi normale, X ~ N (3 , 1) ; μ_x = 3 et σ_x = 1. Sachant que $F_z(1)$ = 0.8413 , $F_z(2)$ = 0.9772 , $F_z(3)$ = 0.9987 pour une variable aléatoire Z ~ N (0 , 1) , la probabilité que la force de la compression soit comprise entre 2 et 4 est de :**
    (A) 0.6826
    (B) 0.8185
    (C) 0.9544
    (D) 0.9974
    (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

19. **Sachant que dans l'usine U1 la force de la compression du robot correspond à une variable aléatoire X qui suit une loi normale X ~ N (3 , 1) , l'intervalle *centré autour de la moyenne* qui contient *exactement* 95.00% des valeurs de cette variable est défini par les limites :**
    (A) [0 ~ 6.00]
    (B) [1.00 ~ 5.00]
    (C) [1.04 ~ 4.96]
    (D) [1.14 ~ 4.86]
    (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

20. **Le gestionnaire a aussi noté que la force de la compression d'un autre robot dans l'usine U2 correspond à une variable aléatoire Y qui suit une loi normale de paramètre μ_y = 2 et σ_y = 4. Y ~ N (2 , 4), la variable aléatoire 5Y suit une :**
    (A) loi normale, 5Y ~ **N** (7 , 9) ; μ_{5y} = 7 et σ_{5y} = 9
    (B) loi normale, 5Y ~ **N** (10 , 20) ; μ_{5y} = 10 et σ_{5y} = 20
    (C) loi normale, 5Y ~ **N** (10 , 32) ; μ_{5y} = 10 et σ_{5y} = 100
    (D) loi normale, 5Y ~ **N** (10 , 8.94) ; μ_{5y} = 10 et σ_{5y} = 8.94
    (E) Aucune des solutions proposées n'est correcte.

Série 1 corrigée

1. **B**
2. **A**
3. **D**
4. **C**
5. **C**
6. **B**
7. **A**
8. **C**
9. **B**
10. **C**
11. **A**
12. **B**
13. **A**
14. **A**
15. **E**
16. **C**
17. **B**
18. **B**
19. **A**
20. **C**

Série 2 corrigée

1. **A**
2. **B**
3. **D**
4. **B**
5. **D**
6. **C**
7. **B**
8. **A**
9. **D**
10. **C**
11. **B**
12. **B**
13. **C**
14. **A**
15. **E**
16. **B**
17. **C**
18. **C**
19. **C**
20. **C**

Série 3 corrigée

1. C
2. A
3. B
4. C
5. B
6. A
7. C
8. C
9. B
10. D
11. C
12. A
13. B
14. C
15. A
16. B
17. B
18. C
19. A
20. C

Série 4 corrigée

1. C
2. B
3. B
4. C
5. A
6. D
7. D
8. D
9. B
10. C
11. A
12. B
13. D
14. A
15. C
16. A
17. D
18. A
19. D
20. C

Série 5 corrigée

1. D
2. E
3. B
4. E
5. C
6. A
7. C
8. B
9. C
10. D
11. C
12. A
13. D
14. A
15. C
16. A
17. D
18. A
19. C
20. B

Bibliographie

- Anderson, Sweeney, Williams, Freeman, Shoesmith, 2009, "*Statistics for Business and Economics*", 2nd Edition, South Western, Cengage learning.
- Anderson, Sweeney, Williams, 2012, "*Essentials of Statistics for Business and Economics", Revisited*, 6th Edition, South Western, Cengage learning.
- Keller 2012, "*Statistics for Management and Economics*", 9th Edition, South Western, Cengage learning.
- Bradley, 2007, "*Essential Statistics for Economics, Business and management*", Wiley Edition.
- Anderson, Sweeney, Williams, 2011, "*Statistique pour l'économie et la gestion*", 3ème Edition, de boeck.
- Aubert Henry, 2011, "*Manuel de statistique*", Ellipses Edition.
- Denglos, 2008, "*Statistiques et Probabilités appliquées*", Presses Universitaires de France.
- Jourdain, 2009, "*Probabilités et statistique*", Ellipses Edition Marketing.
- Lefebvre, 2011, "*Probabilités, statistique et applications*", Presses Internationales.
- Cantoni, Huber, Ronchetti, 2006, "*Maitriser l'aléatoire*", Springer.

Cet ouvrage est disponible gratuitement sur la plateforme Classroom avec le code : ono7tls sur la plateforme Moodle de l'université Ibn Tofail et dans ResearchGate.

PROBABILITÉS POUR ÉCONOMISTES ET GESTIONNAIRES

Cet ouvrage est destiné aux étudiants en licence fondamentale en Sciences Economiques et Gestion-SEG afin de leur donner une initiation aux probabilités. Son contenu est conçu de façon à permettre aux étudiants d'acquérir des connaissances fondamentales et essentielles, qui à des degrés divers, deviennent un outil du processus de décision des gestionnaires et des économistes.

Cet ouvrage présente un ensemble de connaissances de base pour comprendre par la suite l'échantillonnage, les tests d'hypothèses et l'analyse de données multivariée. Son contenu est présenté en 6 chapitres avec des exercices corrigés à la fin de chaque chapitre et des séries de questions à choix multiples avec des solutions. Il a été simplifié au maximum et le recours aux mathématiques est minimal, afin que les étudiants puissent assimiler facilement les connaissances présentées.

Ilham EL HARAOUI

Professeure à la faculté d'économie et de gestion de l'université Ibn Tofail. Elle a obtenu un diplôme d'ingénieur de la statistique et d'économie appliquée de l'INSEA à Rabat, un MBA de l'Université de Yonsei à Séoul et un doctorat en science de gestion de l'université Mohamed-V-Agdal, spécialité marketing. Elle enseigne des cours tels que la statistique et les probabilités pour les étudiants en licence fondamentale, ainsi que l'analyse de données multivariée et le comportement du consommateur pour les étudiants en master. Ses travaux de recherches portent principalement sur le marketing digital et le comportement du consommateur connecté.

ISBN 978-9920-42-149-2