Polynômes

Motivation

Les polynômes sont des objets très simples mais aux propriétés extrêmement riches. Vous savez déjà résoudre les équations de degré 2 : $aX^2+bX+c=0$. Savez-vous que la résolution des équations de degré 3, $aX^3+bX^2+cX+d=0$, a fait l'objet de luttes acharnées dans l'Italie du XVIe siècle ? Un concours était organisé avec un prix pour chacune de trente équations de degré 3 à résoudre. Un jeune italien, Tartaglia, trouve la formule générale des solutions et résout les trente équations en une seule nuit ! Cette méthode que Tartaglia voulait garder secrète sera quand même publiée quelques années plus tard comme la « méthode de Cardan ».
Dans ce chapitre, après quelques définitions des concepts de base, nous allons étudier l'arithmétique des polynômes. Il y a une grande analogie entre l'arithmétique des polynômes et celles des entiers. On continue avec un théorème fondamental de l'algèbre : « Tout polynôme de degré n admet n racines complexes. » On termine avec les fractions rationnelles : une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes.

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désignera l'un des corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Définitions

1.1. Définitions

Définition 1.
Un *polynôme* à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une expression de la forme

$$P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0,$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$.
L'ensemble des polynômes est noté $\mathbb{K}[X]$.
- Les a_i sont appelés les *coefficients* du polynôme.
- Si tous les coefficients a_i sont nuls, P est appelé le *polynôme nul*, il est noté 0.
- On appelle le *degré* de P le plus grand entier i tel que $a_i \neq 0$; on le note $\deg P$. Pour le degré du polynôme nul on pose par convention $\deg(0) = -\infty$.
- Un polynôme de la forme $P = a_0$ avec $a_0 \in \mathbb{K}$ est appelé un *polynôme constant*. Si $a_0 \neq 0$, son degré est 0.

Exemple 1.
- $X^3 - 5X + \frac{3}{4}$ est un polynôme de degré 3.
- $X^n + 1$ est un polynôme de degré n.

- 2 est un polynôme constant, de degré 0.

1.2. Opérations sur les polynômes

- **Égalité.** Soient $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ et $Q = b_nX^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1X + b_0$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
$$P = Q \iff \forall i \quad a_i = b_i$$
et on dit que P et Q sont égaux.
- **Addition.** Soient $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ et $Q = b_nX^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1X + b_0$. On définit :
$$P + Q = (a_n + b_n)X^n + (a_{n-1} + b_{n-1})X^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)X + (a_0 + b_0)$$
- **Multiplication.** Soient $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ et $Q = b_mX^m + b_{m-1}X^{m-1} + \cdots + b_1X + b_0$. On définit
$$P \times Q = c_rX^r + c_{r-1}X^{r-1} + \cdots + c_1X + c_0$$
$$\text{avec } r = n + m \text{ et } c_k = \sum_{i+j=k} a_ib_j \text{ pour } k \in \{0, \ldots, r\}.$$
- **Multiplication par un scalaire.** Si $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\lambda \cdot P$ est le polynôme dont le i-ème coefficient est λa_i.

Exemple 2.
- Soient $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ et $Q = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$. Alors $P + Q = aX^3 + (b + \alpha)X^2 + (c + \beta)X + (d + \gamma)$, $P \times Q = (a\alpha)X^5 + (a\beta + b\alpha)X^4 + (a\gamma + b\beta + c\alpha)X^3 + (b\gamma + c\beta + d\alpha)X^2 + (c\gamma + d\beta)X + d\gamma$. Enfin $P = Q$ si et seulement si $a = 0$, $b = \alpha$, $c = \beta$ et $d = \gamma$.
- La multiplication par un scalaire $\lambda \cdot P$ équivaut à multiplier le polynôme constant λ par le polynôme P.

L'addition et la multiplication se comportent sans problème :

Proposition 1.
Pour $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$ alors
- $0 + P = P$, $\quad P + Q = Q + P$, $\quad (P + Q) + R = P + (Q + R)$;
- $1 \cdot P = P$, $\quad P \times Q = Q \times P$, $\quad (P \times Q) \times R = P \times (Q \times R)$;
- $P \times (Q + R) = P \times Q + P \times R$.

Pour le degré il faut faire attention :

Proposition 2.
Soient P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
$$\boxed{\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q}$$
$$\boxed{\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)}$$

On note $\mathbb{R}_n[X] = \big\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg P \leqslant n\big\}$. Si $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $P + Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

1.3. Vocabulaire

Complétons les définitions sur les polynômes.

Définition 2.
- Les polynômes comportant un seul terme non nul (du type a_kX^k) sont appelés ***monômes***.
- Soit $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$, un polynôme avec $a_n \neq 0$. On appelle ***terme dominant*** le monôme a_nX^n. Le coefficient a_n est appelé le ***coefficient dominant*** de P.
- Si le coefficient dominant est 1, on dit que P est un ***polynôme unitaire***.

Exemple 3.
$P(X) = (X - 1)(X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1)$. On développe cette expression : $P(X) = \big(X^{n+1} + X^n + \cdots + X^2 + X\big) - \big(X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1\big) = X^{n+1} - 1$. $P(X)$ est donc un polynôme de degré $n + 1$, il est unitaire et est somme de deux monômes : X^{n+1} et -1.

Remarque.
Tout polynôme est donc une somme finie de monômes.

Mini-exercices.

1. Soit $P(X) = 3X^3 - 2$, $Q(X) = X^2 + X - 1$, $R(X) = aX + b$. Calculer $P + Q$, $P \times Q$, $(P + Q) \times R$ et $P \times Q \times R$. Trouver a et b afin que le degré de $P - QR$ soit le plus petit possible.
2. Calculer $(X + 1)^5 - (X - 1)^5$.
3. Déterminer le degré de $(X^2 + X + 1)^n - aX^{2n} - bX^{2n-1}$ en fonction de a, b.
4. Montrer que si $\deg P \neq \deg Q$ alors $\deg(P + Q) = \max(\deg P, \deg Q)$. Donner un contre-exemple dans le cas où $\deg P = \deg Q$.
5. Montrer que si $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots$ alors le coefficient devant X^{n-1} de $P(X - \frac{a_{n-1}}{n})$ est nul.

2. Arithmétique des polynômes

Il existe de grandes similitudes entre l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$ et l'arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$. Cela nous permet d'aller assez vite et d'omettre certaines preuves.

2.1. Division euclidienne

Définition 3.
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, on dit que B ***divise*** A s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$. On note alors $B|A$.

On dit aussi que A est multiple de B ou que A est divisible par B.
Outre les propriétés évidentes comme $A|A$, $1|A$ et $A|0$ nous avons :

Proposition 3.
Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$.

1. *Si $A|B$ et $B|A$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $A = \lambda B$.*
2. *Si $A|B$ et $B|C$ alors $A|C$.*
3. *Si $C|A$ et $C|B$ alors $C|(AU + BV)$, pour tout $U, V \in \mathbb{K}[X]$.*

Théorème 1 (Division euclidienne des polynômes)**.**
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$, alors il existe un unique polynôme Q et il existe un unique polynôme R tels que :

$$\boxed{A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B.}$$

Q est appelé le ***quotient*** et R le ***reste*** et cette écriture est la ***division euclidienne*** de A par B.
Notez que la condition $\deg R < \deg B$ signifie $R = 0$ ou bien $0 \leqslant \deg R < \deg B$.
Enfin $R = 0$ si et seulement si $B|A$.

Démonstration.
Unicité. Si $A = BQ + R$ et $A = BQ' + R'$, alors $B(Q - Q') = R' - R$. Or $\deg(R' - R) < \deg B$. Donc $Q' - Q = 0$. Ainsi $Q = Q'$, d'où aussi $R = R'$.
Existence. On montre l'existence par récurrence sur le degré de A.

- Si $\deg A = 0$ et $\deg B > 0$, alors A est une constante, on pose $Q = 0$ et $R = A$. Si $\deg A = 0$ et $\deg B = 0$, on pose $Q = A/B$ et $R = 0$.
- On suppose l'existence vraie lorsque $\deg A \leqslant n - 1$. Soit $A = a_nX^n + \cdots + a_0$ un polynôme de degré n ($a_n \neq 0$). Soit $B = b_mX^m + \cdots + b_0$ avec $b_m \neq 0$. Si $n < m$ on pose $Q = 0$ et $R = A$.
  Si $n \geqslant m$ on écrit $A = B \cdot \frac{a_n}{b_m}X^{n-m} + A_1$ avec $\deg A_1 \leqslant n - 1$. On applique l'hypothèse de récurrence à A_1 : il existe $Q_1, R_1 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A_1 = BQ_1 + R_1$ et $\deg R_1 < \deg B$. Il vient :
  $$A = B\left(\frac{a_n}{b_m}X^{n-m} + Q_1\right) + R_1.$$
  Donc $Q = \frac{a_n}{b_m}X^{n-m} + Q_1$ et $R = R_1$ conviennent.

□

Exemple 4.
On pose une division de polynômes comme on pose une division euclidienne de deux entiers. Par exemple si $A = 2X^4 - X^3 - 2X^2 + 3X - 1$ et $B = X^2 - X + 1$. Alors on trouve $Q = 2X^2 + X - 3$ et $R = -X + 2$. On n'oublie pas de vérifier qu'effectivement $A = BQ + R$.

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 2X^4 - X^3 - 2X^2 + 3X - 1 & X^2 - X + 1 \\
- & 2X^4 - 2X^3 + 2X^2 & \\
\cline{2-3}
 & X^3 - 4X^2 + 3X - 1 & 2X^2 + X - 3 \\
- & X^3 - X^2 + X & \\
\cline{2-2}
 & -3X^2 + 2X - 1 & \\
- & -3X^2 + 3X - 3 & \\
\cline{2-2}
 & -X + 2 &
\end{array}
$$

Exemple 5.
Pour $X^4 - 3X^3 + X + 1$ divisé par $X^2 + 2$ on trouve un quotient égal à $X^2 - 3X - 2$ et un reste égale à $7X + 5$.

$$
\begin{array}{rr|l}
 & X^4 - 3X^3 + X + 1 & X^2 + 2 \\
- & X^4 + 2X^2 & \\
\cline{2-3}
 & -3X^3 - 2X^2 + X + 1 & X^2 - 3X - 2 \\
- & -3X^3 - 6X & \\
\cline{2-2}
 & -2X^2 + 7X + 1 & \\
- & -2X^2 - 4 & \\
\cline{2-2}
 & 7X + 5 &
\end{array}
$$

2.2. pgcd

Proposition 4.
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, avec $A \neq 0$ ou $B \neq 0$. Il existe un unique polynôme unitaire de plus grand degré qui divise à la fois A et B.

Cet unique polynôme est appelé le *pgcd* (plus grand commun diviseur) de A et B que l'on note $\operatorname{pgcd}(A, B)$.

Remarque.
- $\operatorname{pgcd}(A, B)$ est un polynôme unitaire.
- Si $A | B$ et $A \neq 0$, $\operatorname{pgcd}(A, B) = \frac{1}{\lambda} A$, où λ est le coefficient dominant de A.
- Pour tout $\lambda \in K^*$, $\operatorname{pgcd}(\lambda A, B) = \operatorname{pgcd}(A, B)$.
- Comme pour les entiers : si $A = BQ + R$ alors $\operatorname{pgcd}(A, B) = \operatorname{pgcd}(B, R)$. C'est ce qui justifie l'algorithme d'Euclide.

Algorithme d'Euclide.
Soient A et B des polynômes, $B \neq 0$.
On calcule les divisions euclidiennes successives,

$$\begin{array}{ll}
A = BQ_1 + R_1 & \deg R_1 < \deg B \\
B = R_1 Q_2 + R_2 & \deg R_2 < \deg R_1 \\
R_1 = R_2 Q_3 + R_3 & \deg R_3 < \deg R_2 \\
\vdots & \\
R_{k-2} = R_{k-1} Q_k + R_k & \deg R_k < \deg R_{k-1} \\
R_{k-1} = R_k Q_{k+1} &
\end{array}$$

Le degré du reste diminue à chaque division. On arrête l'algorithme lorsque le reste est nul. Le pgcd est le dernier reste non nul R_k (rendu unitaire).

Exemple 6.
Calculons le pgcd de $A = X^4 - 1$ et $B = X^3 - 1$. On applique l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{array}{rcl}
X^4 - 1 & = & (X^3 - 1) \times X + X - 1 \\
X^3 - 1 & = & (X - 1) \times (X^2 + X + 1) + 0
\end{array}$$

Le pgcd est le dernier reste non nul, donc $\operatorname{pgcd}(X^4 - 1, X^3 - 1) = X - 1$.

Exemple 7.
Calculons le pgcd de $A = X^5 + X^4 + 2X^3 + X^2 + X + 2$ et $B = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4$.

$$\begin{array}{rcl}
X^5 + X^4 + 2X^3 + X^2 + X + 2 & = & (X^4 + 2X^3 + X^2 - 4) \times (X - 1) + 3X^3 + 2X^2 + 5X - 2 \\
X^4 + 2X^3 + X^2 - 4 & = & (3X^3 + 2X^2 + 5X - 2) \times \frac{1}{9}(3X + 4) - \frac{14}{9}(X^2 + X + 2) \\
3X^3 + 2X^2 + 5X - 2 & = & (X^2 + X + 2) \times (3X - 1) + 0
\end{array}$$

Ainsi $\operatorname{pgcd}(A, B) = X^2 + X + 2$.

Définition 4.
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que A et B sont ***premiers entre eux*** si $\operatorname{pgcd}(A, B) = 1$.

Pour A, B quelconques on peut se ramener à des polynômes premiers entre eux : si $\operatorname{pgcd}(A, B) = D$ alors A et B s'écrivent : $A = DA'$, $B = DB'$ avec $\operatorname{pgcd}(A', B') = 1$.

2.3. Théorème de Bézout

Théorème 2 (Théorème de Bézout)**.**
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes avec $A \neq 0$ ou $B \neq 0$. On note $D = \operatorname{pgcd}(A, B)$. Il existe deux polynômes $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = D$.

Ce théorème découle de l'algorithme d'Euclide et plus spécialement de sa remontée comme on le voit sur l'exemple suivant.

Exemple 8.
Nous avons calculé $\operatorname{pgcd}(X^4 - 1, X^3 - 1) = X - 1$. Nous remontons l'algorithme d'Euclide, ici il n'y avait qu'une ligne : $X^4 - 1 = (X^3 - 1) \times X + X - 1$, pour en déduire $X - 1 = (X^4 - 1) \times 1 + (X^3 - 1) \times (-X)$. Donc $U = 1$ et $V = -X$ conviennent.

Exemple 9.
Pour $A = X^5 + X^4 + 2X^3 + X^2 + X + 2$ et $B = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4$ nous avions trouvé $D = \operatorname{pgcd}(A, B) = X^2 + X + 2$. En partant de l'avant dernière ligne de l'algorithme d'Euclide on a d'abord : $B = (3X^3 + 2X^2 + 5X - 2) \times \frac{1}{9}(3X + 4) - \frac{14}{9}D$ donc

$$-\frac{14}{9}D = B - (3X^3 + 2X^2 + 5X - 2) \times \frac{1}{9}(3X + 4).$$

La ligne au-dessus dans l'algorithme d'Euclide était : $A = B \times (X - 1) + 3X^3 + 2X^2 + 5X - 2$. On substitue le reste pour obtenir :

$$-\frac{14}{9}D = B - \big(A - B \times (X - 1)\big) \times \frac{1}{9}(3X + 4).$$

On en déduit

$$-\frac{14}{9}D = -A \times \frac{1}{9}(3X + 4) + B\big(1 + (X - 1) \times \frac{1}{9}(3X + 4)\big)$$

Donc en posant $U = \frac{1}{14}(3X + 4)$ et $V = -\frac{1}{14}\big(9 + (X - 1)(3X + 4)\big) = -\frac{1}{14}(3X^2 + X + 5)$ on a $AU + BV = D$.

Le corollaire suivant s'appelle aussi le théorème de Bézout.

Corollaire 1.
Soient A et B deux polynômes. A et B sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux polynômes U et V tels que $AU + BV = 1$.

Corollaire 2.
Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$ avec $A \neq 0$ ou $B \neq 0$. Si $C|A$ et $C|B$ alors $C | \operatorname{pgcd}(A, B)$.

Corollaire 3 (Lemme de Gauss)**.**
Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$. Si $A|BC$ et $\operatorname{pgcd}(A, B) = 1$ alors $A|C$.

2.4. ppcm

Proposition 5.
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes non nuls, alors il existe un unique polynôme unitaire M de plus petit degré tel que $A|M$ et $B|M$.

Cet unique polynôme est appelé le ***ppcm*** (plus petit commun multiple) de A et B qu'on note $\operatorname{ppcm}(A, B)$.

Exemple 10.
$\operatorname{ppcm}\big(X(X-2)^2(X^2+1)^4, (X+1)(X-2)^3(X^2+1)^3\big) = X(X+1)(X-2)^3(X^2+1)^4$.

De plus le ppcm est aussi le plus petit au sens de la divisibilité :

Proposition 6.
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes non nuls et $M = \operatorname{ppcm}(A, B)$. Si $C \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme tel que $A|C$ et $B|C$, alors $M|C$.

Mini-exercices.

1. Trouver les diviseurs de $X^4 + 2X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Montrer que $X - 1 | X^n - 1$ (pour $n \geqslant 1$).
3. Calculer les divisions euclidiennes de A par B avec $A = X^4 - 1$, $B = X^3 - 1$. Puis $A = 4X^3 + 2X^2 - X - 5$ et $B = X^2 + X$; $A = 2X^4 - 9X^3 + 18X^2 - 21X + 2$ et $B = X^2 - 3X + 1$; $A = X^5 - 2X^4 + 6X^3$ et $B = 2X^3 + 1$.
4. Déterminer le pgcd de $A = X^5 + X^3 + X^2 + 1$ et $B = 2X^3 + 3X^2 + 2X + 3$. Trouver les coefficients de Bézout U, V. Mêmes questions avec $A = X^5 - 1$ et $B = X^4 + X + 1$.
5. Montrer que si $AU + BV = 1$ avec $\deg U < \deg B$ et $\deg V < \deg A$ alors les polynômes U, V sont uniques.

3. Racine d'un polynôme, factorisation

3.1. Racines d'un polynôme

Définition 5.
Soit $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$. Pour un élément $x \in \mathbb{K}$, on note $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$. On associe ainsi au polynôme P une ***fonction polynôme*** (que l'on note encore P)

$$P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Définition 6.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une ***racine*** (ou un ***zéro***) de P si $P(\alpha) = 0$.

Proposition 7.

$$P(\alpha) = 0 \iff X - \alpha \text{ divise } P$$

Démonstration. Lorsque l'on écrit la division euclidienne de P par $X-\alpha$ on obtient $P = Q \cdot (X-\alpha) + R$ où R est une constante car $\deg R < \deg(X-\alpha) = 1$. Donc $P(\alpha) = 0 \iff R(\alpha) = 0 \iff R = 0 \iff X-\alpha|P$. □

Définition 7.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que α est une ***racine de multiplicité k*** de P si $(X-\alpha)^k$ divise P alors que $(X-\alpha)^{k+1}$ ne divise pas P. Lorsque $k=1$ on parle d'une ***racine simple***, lorsque $k=2$ d'une ***racine double***, etc.

On dit aussi que α est une ***racine d'ordre k***.

Proposition 8.
Il y a équivalence entre :
(i) α *est une racine de multiplicité* k *de* P.
(ii) Il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ *tel que* $P = (X-\alpha)^k Q$, *avec* $Q(\alpha) \neq 0$.
(iii) $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ *et* $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

La preuve est laissée en exercice.

Remarque.
Par analogie avec la dérivée d'une fonction, si $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ alors le polynôme $P'(X) = a_1 + 2a_2 X + \cdots + n a_n X^{n-1}$ est le ***polynôme dérivé*** de P.

3.2. Théorème de d'Alembert-Gauss

Passons à un résultat essentiel de ce chapitre :

Théorème 3 (Théorème de d'Alembert-Gauss)**.**
Tout polynôme à coefficients complexes de degré $n \geqslant 1$ *a au moins une racine dans* $\mathbb{C}$. *Il admet exactement* n *racines si on compte chaque racine avec multiplicité.*

Nous admettons ce théorème.

Exemple 11.
Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme de degré 2 à coefficients réels : $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors P admet 2 racines réelles distinctes $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$ alors P admet 2 racines complexes distinctes $\frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $\frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$ alors P admet une racine réelle double $\frac{-b}{2a}$.

En tenant compte des multiplicités on a donc toujours exactement 2 racines.

Exemple 12.
$P(X) = X^n - 1$ admet n racines distinctes.
Sachant que P est de degré n alors par le théorème de d'Alembert-Gauss on sait qu'il admet n racines comptées avec multiplicité. Il s'agit donc maintenant de montrer que ce sont des racines simples. Supposons –par l'absurde– que $\alpha \in \mathbb{C}$ soit une racine de multiplicité $\geqslant 2$. Alors $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) = 0$. Donc $\alpha^n - 1 = 0$ et $n\alpha^{n-1} = 0$. De la seconde égalité on déduit $\alpha = 0$, contradictoire avec la première égalité. Donc toutes les racines sont simples. Ainsi les n racines sont distinctes. (Remarque : sur cet exemple particulier on aurait aussi pu calculer les racines qui sont ici les racines n-ième de l'unité.)

Pour les autres corps que les nombres complexes nous avons le résultat plus faible suivant :

Théorème 4.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ *de degré* $n \geqslant 1$. *Alors* P *admet au plus* n *racines dans* $\mathbb{K}$.

Exemple 13.
$P(X) = 3X^3 - 2X^2 + 6X - 4$. Considéré comme un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, P n'a qu'une seule racine (qui est simple) $\alpha = \frac{2}{3}$ et il se décompose en $P(X) = 3(X - \frac{2}{3})(X^2 + 2)$. Si on considère maintenant P comme un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ alors $P(X) = 3(X - \frac{2}{3})(X - \mathrm{i}\sqrt{2})(X + \mathrm{i}\sqrt{2})$ et admet 3 racines simples.

3.3. Polynômes irréductibles

Définition 8.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $\geqslant 1$, on dit que P est ***irréductible*** si pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$ divisant P, alors, soit $Q \in \mathbb{K}^*$, soit il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $Q = \lambda P$.

Remarque.
- Un polynôme irréductible P est donc un polynôme non constant dont les seuls diviseurs de P sont les constantes ou P lui-même (à une constante multiplicative près).
- La notion de polynôme irréductible pour l'arithmétique de $\mathbb{K}[X]$ correspond à la notion de nombre premier pour l'arithmétique de $\mathbb{Z}$.
- Dans le cas contraire, on dit que P est ***réductible*** ; il existe alors des polynômes A, B de $\mathbb{K}[X]$ tels que $P = AB$, avec $\deg A \geqslant 1$ et $\deg B \geqslant 1$.

Exemple 14.
- Tous les polynômes de degré 1 sont irréductibles. Par conséquent il y a une infinité de polynômes irréductibles.
- $X^2 - 1 = (X-1)(X+1) \in \mathbb{R}[X]$ est réductible.
- $X^2 + 1 = (X - \mathrm{i})(X + \mathrm{i})$ est réductible dans $\mathbb{C}[X]$ mais est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
- $X^2 - 2 = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$ est réductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Nous avons l'équivalent du lemme d'Euclide de $\mathbb{Z}$ pour les polynômes :

Proposition 9 (Lemme d'Euclide).
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme irréductible et soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Si $P | AB$ alors $P | A$ ou $P | B$.

Démonstration. Si P ne divise pas A alors $\operatorname{pgcd}(P, A) = 1$ car P est irréductible. Donc, par le lemme de Gauss, P divise B. □

3.4. Théorème de factorisation

Théorème 5.
Tout polynôme non constant $A \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit comme un produit de polynômes irréductibles unitaires :

$$A = \lambda P_1^{k_1} P_2^{k_2} \cdots P_r^{k_r}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $r \in \mathbb{N}^*$, $k_i \in \mathbb{N}^*$ et les P_i sont des polynômes irréductibles distincts.
De plus cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Il s'agit bien sûr de l'analogue de la décomposition d'un nombre en facteurs premiers.

3.5. Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

Théorème 6.
Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.
Donc pour $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ la factorisation s'écrit $P = \lambda (X - \alpha_1)^{k_1} (X - \alpha_2)^{k_2} \cdots (X - \alpha_r)^{k_r}$, où $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont les racines distinctes de P et $k_1, \ldots, k_r$ sont leurs multiplicités.

Démonstration. Ce théorème résulte du théorème de d'Alembert-Gauss. □

Théorème 7.
Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 ainsi que les polynômes de degré 2 ayant un discriminant $\Delta < 0$.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Alors la factorisation s'écrit $P = \lambda (X - \alpha_1)^{k_1} (X - \alpha_2)^{k_2} \cdots (X - \alpha_r)^{k_r} Q_1^{\ell_1} \cdots Q_s^{\ell_s}$, où les α_i sont exactement les racines réelles distinctes de multiplicité k_i et les Q_i sont des polynômes irréductibles de degré 2 : $Q_i = X^2 + \beta_i X + \gamma_i$ avec $\Delta = \beta_i^2 - 4\gamma_i < 0$.

Exemple 15.
$P(X) = 2X^4(X-1)^3(X^2+1)^2(X^2+X+1)$ est déjà décomposé en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ alors que sa décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ est $P(X) = 2X^4(X-1)^3(X-\mathrm{i})^2(X+\mathrm{i})^2(X-j)(X-j^2)$ où $j = e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} = \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

Exemple 16.
Soit $P(X) = X^4 + 1$.

- Sur $\mathbb{C}$. On peut d'abord décomposer $P(X) = (X^2+\mathrm{i})(X^2-\mathrm{i})$. Les racines de P sont donc les racines carrées complexes de i et $-$i. Ainsi P se factorise dans $\mathbb{C}[X]$:
$$P(X) = \left(X - \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\right)\left(X + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\right)\left(X - \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})\right)\left(X + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})\right).$$
- Sur $\mathbb{R}$. Pour un polynôme à coefficient réels, si α est une racine alors $\bar{\alpha}$ aussi. Dans la décomposition ci-dessus on regroupe les facteurs ayant des racines conjuguées, cela doit conduire à un polynôme réel :
$$\begin{aligned} P(X) &= \left[\left(X - \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\right)\left(X - \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})\right)\right]\left[\left(X + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\right)\left(X + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})\right)\right] \\ &= \left[X^2 + \sqrt{2}X + 1\right]\left[X^2 - \sqrt{2}X + 1\right], \end{aligned}$$
qui est la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

Mini-exercices.

1. Trouver un polynôme $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ de degré minimal tel que : $\frac{1}{2}$ soit une racine simple, $\sqrt{2}$ soit une racine double et i soit une racine triple.
2. Montrer cette partie de la proposition 8 : « $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) = 0 \iff \alpha$ est une racine de multiplicité $\geqslant 2$ ».
3. Montrer que pour $P \in \mathbb{C}[X]$: « P admet une racine de multiplicité $\geqslant 2 \iff P$ et P' ne sont pas premiers entre eux ».
4. Factoriser $P(X) = (2X^2+X-2)^2(X^4-1)^3$ et $Q(X) = 3(X^2-1)^2(X^2-X+\frac{1}{4})$ dans $\mathbb{C}[X]$. En déduire leur pgcd et leur ppcm. Mêmes questions dans $\mathbb{R}[X]$.
5. Si $\mathrm{pgcd}(A,B) = 1$ montrer que $\mathrm{pgcd}(A+B, A\times B) = 1$.
6. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ tel que $P(\alpha) = 0$. Vérifier que $P(\bar{\alpha}) = 0$. Montrer que $(X-\alpha)(X-\bar{\alpha})$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{R}[X]$ et qu'il divise P dans $\mathbb{R}[X]$.

4. Fractions rationnelles

Définition 9.
Une ***fraction rationnelle*** à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une expression de la forme
$$F = \frac{P}{Q}$$
où $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ sont deux polynômes et $Q \neq 0$.

Toute fraction rationnelle se décompose comme une somme de fractions rationnelles élémentaires que l'on appelle des « éléments simples ». Mais les éléments simples sont différents sur $\mathbb{C}$ ou sur $\mathbb{R}$.

4.1. Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$

Théorème 8 (Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$)**.**
Soit P/Q une fraction rationnelle avec $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, $\mathrm{pgcd}(P,Q) = 1$ et $Q = (X-\alpha_1)^{k_1}\cdots(X-\alpha_r)^{k_r}$. Alors il existe une et une seule écriture :
$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} = E \; &+ \frac{a_{1,1}}{(X-\alpha_1)^{k_1}} + \frac{a_{1,2}}{(X-\alpha_1)^{k_1-1}} + \cdots + \frac{a_{1,k_1}}{(X-\alpha_1)} \\ &+ \frac{a_{2,1}}{(X-\alpha_2)^{k_2}} + \cdots + \frac{a_{2,k_2}}{(X-\alpha_2)} \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

Le polynôme E s'appelle la ***partie polynomiale*** (ou ***partie entière***). Les termes $\frac{a}{(X-\alpha)^i}$ sont les ***éléments simples*** sur $\mathbb{C}$.

Exemple 17.

- Vérifier que $\frac{1}{X^2+1} = \frac{a}{X+\mathrm{i}} + \frac{b}{X-\mathrm{i}}$ avec $a = \frac{1}{2}\,\mathrm{i}$, $b = -\frac{1}{2}\,\mathrm{i}$.
- Vérifier que $\frac{X^4-8X^2+9X-7}{(X-2)^2(X+3)} = X + 1 + \frac{-1}{(X-2)^2} + \frac{2}{X-2} + \frac{-1}{X+3}$.

Comment se calcule cette décomposition ? En général on commence par déterminer la partie polynomiale. Tout d'abord si $\deg Q > \deg P$ alors $E(X) = 0$. Si $\deg P \leqslant \deg Q$ alors effectuons la division euclidienne de P par Q : $P = QE + R$ donc $\frac{P}{Q} = E + \frac{R}{Q}$ où $\deg R < \deg Q$. La partie polynomiale est donc le quotient de cette division. Et on s'est ramené au cas d'une fraction $\frac{R}{Q}$ avec $\deg R < \deg Q$. Voyons en détails comment continuer sur un exemple.

Exemple 18.

Décomposons la fraction $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{X^5 - 2X^3 + 4X^2 - 8X + 11}{X^3 - 3X + 2}$.

- **Première étape : partie polynomiale.** On calcule la division euclidienne de P par Q : $P(X) = (X^2+1)Q(X) + 2X^2 - 5X + 9$. Donc la partie polynomiale est $E(X) = X^2 + 1$ et la fraction s'écrit $\frac{P(X)}{Q(X)} = X^2 + 1 + \frac{2X^2-5X+9}{Q(X)}$. Notons que pour la fraction $\frac{2X^2-5X+9}{Q(X)}$ le degré du numérateur est strictement plus petit que le degré du dénominateur.
- **Deuxième étape : factorisation du dénominateur.** Q a pour racine évidente $+1$ (racine double) et -2 (racine simple) et se factorise donc ainsi $Q(X) = (X-1)^2(X+2)$.
- **Troisième étape : décomposition théorique en éléments simples.** Le théorème de décomposition en éléments simples nous dit qu'il existe une unique décomposition : $\frac{P(X)}{Q(X)} = E(X) + \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+2}$. Nous savons déjà que $E(X) = X^2 + 1$, il reste à trouver les nombres a, b, c.
- **Quatrième étape : détermination des coefficients.** Voici une première façon de déterminer a, b, c. On récrit la fraction $\frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+2}$ au même dénominateur et on l'identifie avec $\frac{2X^2-5X+9}{Q(X)}$:
$$\frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+2} = \frac{(b+c)X^2 + (a+b-2c)X + 2a - 2b + c}{(X-1)^2(X+2)}$$
qui doit être égale à
$$\frac{2X^2 - 5X + 9}{(X-1)^2(X+2)}.$$
On en déduit $b + c = 2$, $a + b - 2c = -5$ et $2a - 2b + c = 9$. Cela conduit à l'unique solution $a = 2$, $b = -1$, $c = 3$. Donc
$$\frac{P}{Q} = \frac{X^5 - 2X^3 + 4X^2 - 8X + 11}{X^3 - 3X + 2} = X^2 + 1 + \frac{2}{(X-1)^2} + \frac{-1}{X-1} + \frac{3}{X+2}.$$
Cette méthode est souvent la plus longue.
- **Quatrième étape (bis) : détermination des coefficients.** Voici une autre méthode plus efficace.
Notons $\frac{P'(X)}{Q(X)} = \frac{2X^2-5X+9}{(X-1)^2(X+2)}$ dont la décomposition théorique est : $\frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+2}$
Pour déterminer a on multiplie la fraction $\frac{P'}{Q}$ par $(X-1)^2$ et on évalue en $x = 1$.
Tout d'abord en partant de la décomposition théorique on a :
$$F_1(X) = (X-1)^2 \frac{P'(X)}{Q(X)} = a + b(X-1) + c\frac{(X-1)^2}{X+2} \quad \text{donc} \quad F_1(1) = a$$
D'autre part
$$F_1(X) = (X-1)^2 \frac{P'(X)}{Q(X)} = (X-1)^2 \frac{2X^2 - 5X + 9}{(X-1)^2(X+2)} = \frac{2X^2 - 5X + 9}{X+2}$$
donc $F_1(1) = 2$. On en déduit $a = 2$.
On fait le même processus pour déterminer c : on multiplie par $(X+2)$ et on évalue en -2. On calcule $F_2(X) = (X+2)\frac{P'(X)}{Q(X)} = \frac{2X^2-5X+9}{(X-1)^2} = a\frac{X+2}{(X-1)^2} + b\frac{X+2}{X-1} + c$ de deux façons et lorsque l'on évalue $x = -2$ on obtient d'une part $F_2(-2) = c$ et d'autre part $F_2(-2) = 3$. Ainsi $c = 3$.
Comme les coefficients sont uniques tous les moyens sont bons pour les déterminer. Par exemple lorsque l'on évalue la décomposition théorique $\frac{P'(X)}{Q(X)} = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+2}$ en $x = 0$, on obtient :
$$\frac{P'(0)}{Q(0)} = a - b + \frac{c}{2}$$
Donc $\frac{9}{2} = a - b + \frac{c}{2}$. Donc $b = a + \frac{c}{2} - \frac{9}{2} = -1$.

4.2. Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

Théorème 9 (Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$)**.**
Soit P/Q une fraction rationnelle avec $P,Q \in \mathbb{R}[X]$, $\operatorname{pgcd}(P,Q) = 1$. Alors P/Q s'écrit de manière unique comme somme :

- *d'une partie polynomiale $E(X)$,*
- *d'éléments simples du type $\frac{a}{(X-\alpha)^i}$,*
- *d'éléments simples du type $\frac{aX+b}{(X^2+\alpha X+\beta)^i}$.*

Où les $X - \alpha$ et $X^2 + \alpha X + \beta$ sont les facteurs irréductibles de $Q(X)$ et les exposants i sont inférieurs ou égaux à la puissance correspondante dans cette factorisation.

Exemple 19.
Décomposition en éléments simples de $\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{3X^4+5X^3+11X^2+5X+3}{(X^2+X+1)^2(X-1)}$. Comme $\deg P < \deg Q$ alors $E(X) = 0$. Le dénominateur est déjà factorisé sur $\mathbb{R}$ car $X^2 + X + 1$ est irréductible. La décomposition théorique est donc :

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{aX+b}{(X^2+X+1)^2} + \frac{cX+d}{X^2+X+1} + \frac{e}{X-1}.$$

Il faut ensuite mener au mieux les calculs pour déterminer les coefficients afin d'obtenir :

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{2X+1}{(X^2+X+1)^2} + \frac{-1}{X^2+X+1} + \frac{3}{X-1}.$$

Mini-exercices.

1. Soit $Q(X) = (X-2)^2(X^2-1)^3(X^2+1)^4$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ quelle est la forme théorique de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ de $\frac{P}{Q}$? Et sur $\mathbb{R}$?
2. Décomposer les fractions suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$: $\frac{1}{X^2-1}$; $\frac{X^2+1}{(X-1)^2}$; $\frac{X}{X^3-1}$.
3. Décomposer les fractions suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$: $\frac{X^2+X+1}{(X-1)(X+2)^2}$; $\frac{2X^2-X}{(X^2+2)^2}$; $\frac{X^6}{(X^2+1)^2}$.
4. Soit $F(X) = \frac{2X^2+7X-20}{X+2}$. Déterminer l'équation de l'asymptote oblique en $\pm\infty$. Étudier la position du graphe de F par rapport à cette droite.

Matrices

Les matrices sont des tableaux de nombres. La résolution d'un certain nombre de problèmes d'algèbre linéaire se ramène à des manipulations sur les matrices. Ceci est vrai en particulier pour la résolution des systèmes linéaires.

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps. On peut penser à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Définition

1.1. Définition

Définition 1.

- Une *matrice* A est un tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbb{K}$.
- Elle est dite de *taille* $n \times p$ si le tableau possède n lignes et p colonnes.
- Les nombres du tableau sont appelés les *coefficients* de A.
- Le coefficient situé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne est noté $a_{i,j}$.

Un tel tableau est représenté de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \big(a_{i,j}\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \quad \text{ou} \quad \big(a_{i,j}\big).$$

Exemple 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

est une matrice 2×3 avec, par exemple, $a_{1,1} = 1$ et $a_{2,3} = 7$.

Encore quelques définitions :

Définition 2.

- Deux matrices sont *égales* lorsqu'elles ont la même taille et que les coefficients correspondants sont égaux.
- L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $M_{n,p}(\mathbb{K})$. Les éléments de $M_{n,p}(\mathbb{R})$

sont appelés ***matrices réelles***.

1.2. Matrices particulières

Voici quelques types de matrices intéressantes :

- Si $n = p$ (même nombre de lignes que de colonnes), la matrice est dite ***matrice carrée***. On note $M_n(\mathbb{K})$ au lieu de $M_{n,n}(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

  Les éléments $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ forment la ***diagonale principale*** de la matrice.
- Une matrice qui n'a qu'une seule ligne ($n = 1$) est appelée ***matrice ligne*** ou ***vecteur ligne***. On la note

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \end{pmatrix}.$$

- De même, une matrice qui n'a qu'une seule colonne ($p = 1$) est appelée ***matrice colonne*** ou ***vecteur colonne***. On la note

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}.$$

- La matrice (de taille $n \times p$) dont tous les coefficients sont des zéros est appelée la ***matrice nulle*** et est notée $0_{n,p}$ ou plus simplement 0. Dans le calcul matriciel, la matrice nulle joue le rôle du nombre 0 pour les réels.

1.3. Addition de matrices

Définition 3 (Somme de deux matrices)**.**
Soient A et B deux matrices ayant la même taille $n \times p$. Leur ***somme*** $C = A + B$ est la matrice de taille $n \times p$ définie par

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

En d'autres termes, on somme coefficients par coefficients. Remarque : on note indifféremment a_{ij} où $a_{i,j}$ pour les coefficients de la matrice A.

Exemple 2.

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Par contre si} \quad B' = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad A + B' \quad \text{n'est pas définie.}$$

Définition 4 (Produit d'une matrice par un scalaire)**.**
Le produit d'une matrice $A = (a_{ij})$ de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ par un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ est la matrice (αa_{ij}) formée en multipliant chaque coefficient de A par α. Elle est notée $\alpha \cdot A$ (ou simplement αA).

Exemple 3.

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha = 2 \quad \text{alors} \quad \alpha A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $(-1)A$ est l'***opposée*** de A et est notée $-A$. La ***différence*** $A - B$ est définie par $A + (-B)$.

Exemple 4.

$$\text{Si}\quad A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\4&-5&2\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad B=\begin{pmatrix}-1&4&2\\7&-5&3\end{pmatrix}\quad\text{alors}\quad A-B=\begin{pmatrix}3&-5&-2\\-3&0&-1\end{pmatrix}.$$

L'addition et la multiplication par un scalaire se comportent sans surprises :

Proposition 1.
Soient A, B et C trois matrices appartenant à $M_{n,p}(\mathbb{K})$. Soient $\alpha\in\mathbb{K}$ et $\beta\in\mathbb{K}$ deux scalaires.

1. $A+B=B+A$ *: la somme est commutative,*
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$ *: la somme est associative,*
3. $A+0=A$ *: la matrice nulle est l'élément neutre de l'addition,*
4. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$,
5. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.

Démonstration. Prouvons par exemple le quatrième point. Le terme général de $(\alpha+\beta)A$ est égal à $(\alpha+\beta)a_{ij}$. D'après les règles de calcul dans $\mathbb{K}$, $(\alpha+\beta)a_{ij}$ est égal à $\alpha a_{ij}+\beta a_{ij}$ qui est le terme général de la matrice $\alpha A+\beta A$. □

Mini-exercices.

1. Soient $A=\left(\begin{smallmatrix}-7&2\\0&-1\\1&-4\end{smallmatrix}\right)$, $B=\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)$, $C=\left(\begin{smallmatrix}21&-6\\0&3\\-3&12\end{smallmatrix}\right)$, $D=\frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&1&1\end{smallmatrix}\right)$, $E=\left(\begin{smallmatrix}1&2\\-3&0\\-8&6\end{smallmatrix}\right)$. Calculer toutes les sommes possibles de deux de ces matrices. Calculer $3A+2C$ et $5B-4D$. Trouver α tel que $A-\alpha C$ soit la matrice nulle.
2. Montrer que si $A+B=A$, alors B est la matrice nulle.
3. Que vaut $0\cdot A$? et $1\cdot A$? Justifier l'affirmation : $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$. Idem avec $nA=A+A+\cdots+A$ (n occurrences de A).

2. Multiplication de matrices

2.1. Définition du produit

Le produit AB de deux matrices A et B est défini si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

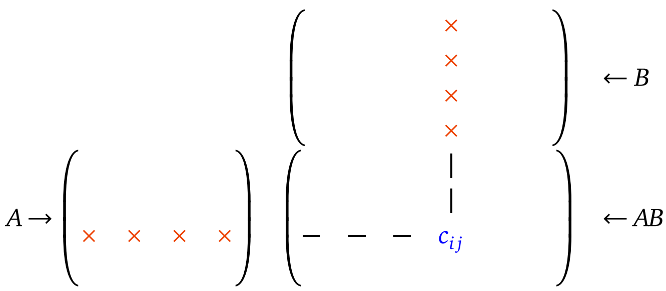
Définition 5 (Produit de deux matrices).
Soient $A=(a_{ij})$ une matrice $n\times p$ et $B=(b_{ij})$ une matrice $p\times q$. Alors le produit $C=AB$ est une matrice $n\times q$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par :

$$\boxed{c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}}$$

On peut écrire le coefficient de façon plus développée, à savoir :

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ik}b_{kj}+\cdots+a_{ip}b_{pj}.$$

Il est commode de disposer les calculs de la façon suivante.



Avec cette disposition, on considère d'abord la ligne de la matrice A située à gauche du coefficient que l'on veut calculer (ligne représentée par des $\times$ dans A) et aussi la colonne de la matrice B située au-dessus du coefficient que l'on veut calculer (colonne représentée par des $\times$ dans B). On calcule le produit du premier coefficient de la ligne par le premier coefficient de la colonne ($a_{i1} \times b_{1j}$), que l'on ajoute au produit du deuxième coefficient de la ligne par le deuxième coefficient de la colonne ($a_{i2} \times b_{2j}$), que l'on ajoute au produit du troisième…

2.2. Exemples

Exemple 5.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On dispose d'abord le produit correctement (à gauche) : la matrice obtenue est de taille 2×2. Puis on calcule chacun des coefficients, en commençant par le premier coefficient $c_{11} = 1 \times 1 \ + \ 2 \times (-1) \ + \ 3 \times 1 = 2$ (au milieu), puis les autres (à droite).

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

Un exemple intéressant est le produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne :

$$u = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Alors $u \times v$ est une matrice de taille 1×1 dont l'unique coefficient est $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$. Ce nombre s'appelle le ***produit scalaire*** des vecteurs u et v.

Calculer le coefficient c_{ij} dans le produit $A \times B$ revient donc à calculer le produit scalaire des vecteurs formés par la i-ème ligne de A et la j-ème colonne de B.

2.3. Pièges à éviter

Premier piège. Le produit de matrices n'est pas commutatif en général.
En effet, il se peut que AB soit défini mais pas BA, ou que AB et BA soient tous deux définis mais pas de la même taille. Mais même dans le cas où AB et BA sont définis et de la même taille, on a en général $AB \neq BA$.

Exemple 6.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \qquad \text{mais} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}.$$

Deuxième piège. $AB = 0$ **n'implique pas** $A = 0$ **ou** $B = 0$**.**
Il peut arriver que le produit de deux matrices non nulles soit nul. En d'autres termes, on peut avoir $A \neq 0$ et $B \neq 0$ mais $AB = 0$.

Exemple 7.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Troisième piège. $AB = AC$ **n'implique pas** $B = C$**.** On peut avoir $AB = AC$ et $B \neq C$.

Exemple 8.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

2.4. Propriétés du produit de matrices

Malgré les difficultés soulevées au-dessus, le produit vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 2.

1. $A(BC) = (AB)C$: *associativité du produit,*
2. $A(B+C) = AB + AC$ *et* $(B+C)A = BA + CA$: *distributivité du produit par rapport à la somme,*
3. $A \cdot 0 = 0$ *et* $0 \cdot A = 0$.

Démonstration. Posons $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = (b_{ij}) \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C = (c_{ij}) \in M_{q,r}(\mathbb{K})$. Prouvons que $A(BC) = (AB)C$ en montrant que les matrices $A(BC)$ et $(AB)C$ ont les mêmes coefficients.

Le terme d'indice (i,k) de la matrice AB est $x_{ik} = \sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell} b_{\ell k}$. Le terme d'indice (i,j) de la matrice $(AB)C$ est donc

$$\sum_{k=1}^{q} x_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell} b_{\ell k} \right) c_{kj}.$$

Le terme d'indice (ℓ, j) de la matrice BC est $y_{\ell j} = \sum_{k=1}^{q} b_{\ell k} c_{kj}$. Le terme d'indice (i,j) de la matrice $A(BC)$ est donc

$$\sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell} \left(\sum_{k=1}^{q} b_{\ell k} c_{kj} \right).$$

Comme dans $\mathbb{K}$ la multiplication est distributive et associative, les coefficients de $(AB)C$ et $A(BC)$ coïncident. Les autres démonstrations se font comme celle de l'associativité. □

2.5. La matrice identité

La matrice carrée suivante s'appelle la ***matrice identité*** :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Ses éléments diagonaux sont égaux à 1 et tous ses autres éléments sont égaux à 0. Elle se note I_n ou simplement I. Dans le calcul matriciel, la matrice identité joue un rôle analogue à celui du nombre 1 pour les réels. C'est l'élément neutre pour la multiplication. En d'autres termes :

Proposition 3.
Si A est une matrice $n \times p$, alors

$$I_n \cdot A = A \qquad \text{et} \qquad A \cdot I_p = A.$$

Démonstration. Nous allons détailler la preuve. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ de terme général a_{ij}. La matrice unité d'ordre p est telle que tous les éléments de la diagonale principale sont égaux à 1, les autres étant tous nuls.
On peut formaliser cela en introduisant le symbole de Kronecker. Si i et j sont deux entiers, on appelle ***symbole de Kronecker***, et on note $\delta_{i,j}$, le réel qui vaut 0 si i est différent de j, et 1 si i est égal à j. Donc

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = j. \end{cases}$$

Alors le terme général de la matrice identité I_p est $\delta_{i,j}$ avec i et j entiers, compris entre 1 et p.

La matrice produit AI_p est une matrice appartenant à $M_{n,p}(\mathbb{K})$ dont le terme général c_{ij} est donné par la formule $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\delta_{kj}$. Dans cette somme, i et j sont fixés et k prend toutes les valeurs comprises entre 1 et p. Si $k \neq j$ alors $\delta_{kj} = 0$, et si $k = j$ alors $\delta_{kj} = 1$. Donc dans la somme qui définit c_{ij}, tous les termes correspondant à des valeurs de k différentes de j sont nuls et il reste donc $c_{ij} = a_{ij}\delta_{jj} = a_{ij}1 = a_{ij}$. Donc les matrices AI_p et A ont le même terme général et sont donc égales. L'égalité $I_n A = A$ se démontre de la même façon. □

2.6. Puissance d'une matrice

Dans l'ensemble $M_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, la multiplication des matrices est une opération interne : si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ alors $AB \in M_n(\mathbb{K})$.
En particulier, on peut multiplier une matrice carrée par elle-même : on note $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$.
On peut ainsi définir les puissances successives d'une matrice :

Définition 6.
Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, on définit les puissances successives de A par $A^0 = I_n$ et $A^{p+1} = A^p \times A$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Autrement dit, $A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ facteurs}}$.

Exemple 9.

On cherche à calculer A^p avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On calcule A^2, A^3 et A^4 et on obtient :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad A^4 = A^3 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

L'observation de ces premières puissances permet de penser que la formule est : $A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}$. Démontrons ce résultat par récurrence.
Il est vrai pour $p = 0$ (on trouve l'identité). On le suppose vrai pour un entier p et on va le démontrer pour $p + 1$. On a, d'après la définition,

$$A^{p+1} = A^p \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^{p+1} - 1 \\ 0 & (-1)^{p+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{p+1} \end{pmatrix}.$$

Donc la propriété est démontrée.

2.7. Formule du binôme

Comme la multiplication n'est pas commutative, les identités binomiales usuelles sont fausses. En particulier, $(A + B)^2$ ne vaut en général pas $A^2 + 2AB + B^2$, mais on sait seulement que

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2.$$

Proposition 4 (Calcul de $(A + B)^p$ lorsque $AB = BA$).
*Soient A et B deux éléments de $M_n(\mathbb{K})$ qui **commutent**, c'est-à-dire tels que $AB = BA$. Alors, pour tout entier $p \geqslant 0$, on a la formule*

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k} B^k$$

où $\binom{p}{k}$ désigne le coefficient du binôme.

La démonstration est similaire à celle de la formule du binôme pour $(a + b)^p$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Exemple 10.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $N = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice N est nilpotente (c'est-à-dire il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $N^k = 0$) comme le montrent les calculs suivants :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N^4 = 0.$$

Comme on a $A = I + N$ et les matrices N et I commutent (la matrice identité commute avec toutes les matrices), on peut appliquer la formule du binôme de Newton. On utilise que $I^k = I$ pour tout k et surtout que $N^k = 0$ si $k \geqslant 4$. On obtient

$$A^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} N^k I^{p-k} = \sum_{k=0}^{3} \binom{p}{k} N^k = I + pN + \tfrac{p(p-1)}{2!} N^2 + \tfrac{p(p-1)(p-2)}{3!} N^3.$$

D'où

$$A^p = \begin{pmatrix} 1 & p & p^2 & p(p^2-p+1) \\ 0 & 1 & 2p & p(3p-2) \\ 0 & 0 & 1 & 3p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mini-exercices.

1. Soient $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{smallmatrix}\right)$, $C = \left(\begin{smallmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 2 \\ -5 & 5 \end{smallmatrix}\right)$, $D = \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $E = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$. Quels produits sont possibles ? Les calculer !
2. Soient $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ et $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Calculer A^2, B^2, AB et BA.
3. Soient $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ et $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Calculer A^p et B^p pour tout $p \geqslant 0$. Montrer que $AB = BA$. Calculer $(A+B)^p$.

3. Inverse d'une matrice : définition

3.1. Définition

Définition 7 (Matrice inverse).
Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. S'il existe une matrice carrée B de taille $n \times n$ telle que

$$AB = I \qquad \text{et} \qquad BA = I,$$

on dit que A est ***inversible***. On appelle B l'***inverse de A*** et on la note A^{-1}.

On verra plus tard qu'il suffit en fait de vérifier une seule des conditions $AB = I$ ou bien $BA = I$.

- Plus généralement, quand A est inversible, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note :
$$A^{-p} = (A^{-1})^p = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{p \text{ facteurs}}.$$
- L'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$.

3.2. Exemples

Exemple 11.

Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. Étudier si A est inversible, c'est étudier l'existence d'une matrice $B = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, telle que $AB = I$ et $BA = I$. Or $AB = I$ équivaut à :

$$AB = I \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette égalité équivaut au système :

$$\begin{cases} a+2c=1 \\ b+2d=0 \\ 3c=0 \\ 3d=1 \end{cases}$$

Sa résolution est immédiate : $a=1$, $b=-\frac{2}{3}$, $c=0$, $d=\frac{1}{3}$. Il n'y a donc qu'une seule matrice possible, à savoir $B=\left(\begin{smallmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{smallmatrix}\right)$. Pour prouver qu'elle convient, il faut aussi montrer l'égalité $BA=I$, dont la vérification est laissée au lecteur. La matrice A est donc inversible et $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Exemple 12.

La matrice $A=\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ n'est pas inversible. En effet, soit $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice quelconque. Alors le produit

$$BA=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3a+5b & 0 \\ 3c+5d & 0 \end{pmatrix}$$

ne peut jamais être égal à la matrice identité.

Exemple 13.

- Soit I_n la matrice carrée identité de taille $n \times n$. C'est une matrice inversible, et son inverse est elle-même par l'égalité $I_n I_n = I_n$.
- La matrice nulle 0_n de taille $n \times n$ n'est pas inversible. En effet on sait que, pour toute matrice B de $M_n(\mathbb{K})$, on a $B0_n = 0_n$, qui ne peut jamais être la matrice identité.

3.3. Propriétés

Unicité

Proposition 5.
Si A est inversible, alors son inverse est unique.

Démonstration. La méthode classique pour mener à bien une telle démonstration est de supposer l'existence de deux matrices B_1 et B_2 satisfaisant aux conditions imposées et de démontrer que $B_1 = B_2$.
Soient donc B_1 telle que $AB_1 = B_1A = I_n$ et B_2 telle que $AB_2 = B_2A = I_n$. Calculons $B_2(AB_1)$. D'une part, comme $AB_1 = I_n$, on a $B_2(AB_1) = B_2$. D'autre part, comme le produit des matrices est associatif, on a $B_2(AB_1) = (B_2A)B_1 = I_nB_1 = B_1$. Donc $B_1 = B_2$. □

Inverse de l'inverse

Proposition 6.
Soit A une matrice inversible. Alors A^{-1} est aussi inversible et on a :

$$\boxed{(A^{-1})^{-1} = A}$$

Inverse d'un produit

Proposition 7.
Soient A et B deux matrices inversibles de même taille. Alors AB est inversible et

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

Il faut bien faire attention à l'inversion de l'ordre !

Démonstration. Il suffit de montrer $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$ et $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$. Cela suit de

$$\begin{aligned} & (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(AA^{-1})B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I, \\ \text{et} \quad & (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I. \end{aligned}$$

□

De façon analogue, on montre que si $A_1, \dots, A_m$ sont inversibles, alors

$$(A_1A_2\cdots A_m)^{-1} = A_m^{-1}A_{m-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}.$$

Simplification par une matrice inversible

Si C est une matrice quelconque de $M_n(\mathbb{K})$, nous avons vu que la relation $AC = BC$ où A et B sont des éléments de $M_n(\mathbb{K})$ n'entraîne pas forcément l'égalité $A = B$. En revanche, si C est une matrice inversible, on a la proposition suivante :

Proposition 8.
Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$ et C une matrice inversible de $M_n(\mathbb{K})$. Alors l'égalité $AC = BC$ implique l'égalité $A = B$.

Démonstration. Ce résultat est immédiat : si on multiplie à droite l'égalité $AC = BC$ par C^{-1}, on obtient l'égalité : $(AC)C^{-1} = (BC)C^{-1}$. En utilisant l'associativité du produit des matrices on a $A(CC^{-1}) = B(CC^{-1})$, ce qui donne d'après la définition de l'inverse $AI = BI$, d'où $A = B$. □

Mini-exercices.

1. Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1}, B^{-1} , $(AB)^{-1}$, $(BA)^{-1}$, A^{-2}.
2. Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $2A - A^2$. Sans calculs, en déduire A^{-1}.

4. Inverse d'une matrice : calcul

Nous allons voir une méthode pour calculer l'inverse d'une matrice quelconque de manière efficace. Cette méthode est une reformulation de la méthode du pivot de Gauss pour les systèmes linéaires. Auparavant, nous commençons par une formule directe dans le cas simple des matrices 2×2.

4.1. Matrices 2×2

Considérons la matrice 2×2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Proposition 9.
Si $ad - bc \neq 0$, alors A est inversible et

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Démonstration. On vérifie que si $B = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ alors $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Idem pour BA. □

4.2. Méthode de Gauss pour inverser les matrices

La méthode pour inverser une matrice A consiste à faire des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A jusqu'à la transformer en la matrice identité I. On fait simultanément les mêmes opérations élémentaires en partant de la matrice I. On aboutit alors à une matrice qui est A^{-1}. La preuve sera vue dans la section suivante.

En pratique, on fait les deux opérations en même temps en adoptant la disposition suivante : à côté de la matrice A que l'on veut inverser, on rajoute la matrice identité pour former un tableau $(A \mid I)$. Sur les lignes de cette matrice augmentée, on effectue des opérations élémentaires jusqu'à obtenir le tableau $(I \mid B)$. Et alors $B = A^{-1}$.

Ces opérations élémentaires sur les lignes sont :

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: on peut multiplier une ligne par un réel non nul (ou un élément de $\mathbb{K} \setminus \{0\}$).
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : on peut ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j.
3. $L_i \leftrightarrow L_j$: on peut échanger deux lignes.

N'oubliez pas : tout ce que vous faites sur la partie gauche de la matrice augmentée, vous devez aussi le faire sur la partie droite.

4.3. Un exemple

Calculons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Voici la matrice augmentée, avec les lignes numérotées :

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

On applique la méthode de Gauss pour faire apparaître des 0 sur la première colonne, d'abord sur la deuxième ligne par l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$ qui conduit à la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$$

Puis un 0 sur la première colonne, à la troisième ligne, avec $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

On multiplie la ligne L_2 afin qu'elle commence par 1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow -\frac{1}{8} L_2$$

On continue afin de faire apparaître des 0 partout sous la diagonale, et on multiplie la ligne L_3. Ce qui termine la première partie de la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$$

puis

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow 2L_3$$

Il ne reste plus qu'à « remonter » pour faire apparaître des zéros au-dessus de la diagonale :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{8} L_3}$$

puis

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3}$$

Ainsi l'inverse de A est la matrice obtenue à droite et après avoir factorisé tous les coefficients par $\frac{1}{4}$, on a obtenu :

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Pour se rassurer sur ses calculs, on n'oublie pas de vérifier rapidement que $A \times A^{-1} = I$.

Mini-exercices.

1. Si possible calculer l'inverse des matrices : $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} \alpha+1 & 1 \\ 2 & \alpha \end{smallmatrix}\right)$.
2. Soit $A(\theta) = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$. Calculer $A(\theta)^{-1}$.
3. Calculer l'inverse des matrices : $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

5. Inverse d'une matrice : systèmes linéaires et matrices élémentaires

5.1. Matrices et systèmes linéaires

Le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}\,x_p & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}\,x_p & = & b_2 \\ & & \cdots & & & & & & \\ a_{n1}\,x_1 & + & a_{n2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{np}\,x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}.$$

On appelle $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice des coefficients du système. $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ est le vecteur du second membre. Le vecteur $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ est une solution du système si et seulement si

$$AX = B.$$

Nous savons que :

Théorème 1.
Un système d'équations linéaires n'a soit aucune solution, soit une seule solution, soit une infinité de solutions.

5.2. Matrices inversibles et systèmes linéaires

Considérons le cas où le nombre d'équations égale le nombre d'inconnues :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}.$$

Alors $A \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée et B un vecteur de $M_{n,1}(\mathbb{K})$. Pour tout second membre, nous pouvons utiliser les matrices pour trouver la solution du système linéaire.

Proposition 10.
Si la matrice A est inversible, alors la solution du système $AX = B$ est unique et est :

$$\boxed{X = A^{-1}B.}$$

La preuve est juste de vérifier que si $X = A^{-1}B$, alors $AX = A\big(A^{-1}B\big) = \big(AA^{-1}\big)B = I \cdot B = B$. Réciproquement si $AX = B$, alors nécessairement $X = A^{-1}B$. Nous verrons bientôt que si la matrice n'est pas inversible, alors soit il n'y a pas de solution, soit une infinité.

5.3. Les matrices élémentaires

Pour calculer l'inverse d'une matrice A, et aussi pour résoudre des systèmes linéaires, nous avons utilisé trois opérations élémentaires sur les lignes qui sont :

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: on peut multiplier une ligne par un réel non nul (ou un élément de $\mathbb{K} \setminus \{0\}$).
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : on peut ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j.
3. $L_i \leftrightarrow L_j$: on peut échanger deux lignes.

Nous allons définir trois matrices élémentaires $E_{L_i \leftarrow \lambda L_i}$, $E_{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}$, $E_{L_i \leftrightarrow L_j}$ correspondant à ces opérations. Plus précisément, le produit $E \times A$ correspondra à l'opération élémentaire sur A. Voici les définitions accompagnées d'exemples.

1. La matrice $E_{L_i \leftarrow \lambda L_i}$ est la matrice obtenue en multipliant par λ la i-ème ligne de la matrice identité I_n, où λ est un nombre réel non nul.

$$E_{L_2 \leftarrow 5L_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. La matrice $E_{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}$ est la matrice obtenue en ajoutant λ fois la j-ème ligne de I_n à la i-ème ligne de I_n.

$$E_{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. La matrice $E_{L_i \leftrightarrow L_j}$ est la matrice obtenue en permutant les i-ème et j-ème lignes de I_n.

$$E_{L_2 \leftrightarrow L_4} = E_{L_4 \leftrightarrow L_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les opérations élémentaires sur les lignes sont réversibles, ce qui entraîne l'inversibilité des matrices élémentaires.

Le résultat de la multiplication d'un matrice élémentaire E par A est la matrice obtenue en effectuant l'opération élémentaire correspondante sur A. Ainsi :

1. La matrice $E_{L_i \leftarrow \lambda L_i} \times A$ est la matrice obtenue en multipliant par λ la i-ème ligne de A.
2. La matrice $E_{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j} \times A$ est la matrice obtenue en ajoutant λ fois la j-ème ligne de A à la i-ème ligne de A.
3. La matrice $E_{L_i \leftrightarrow L_j} \times A$ est la matrice obtenue en permutant les i-ème et j-ème lignes de A.

Exemple 14.

1.
$$E_{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2} \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{1}{3}y_1 & \frac{1}{3}y_2 & \frac{1}{3}y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

2.
$$E_{L_1 \leftarrow L_1 - 7L_3} \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 7z_1 & x_2 - 7z_2 & x_3 - 7z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

3.
$$E_{L_2 \leftrightarrow L_3} \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

5.4. Équivalence à une matrice échelonnée

Définition 8.
Deux matrices A et B sont dites ***équivalentes par lignes*** si l'une peut être obtenue à partir de l'autre par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. On note $A \sim B$.

Définition 9.
Une matrice est ***échelonnée*** si :
- le nombre de zéros commençant une ligne croît strictement ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des zéros.

Elle est ***échelonnée réduite*** si en plus :
- le premier coefficient non nul d'une ligne (non nulle) vaut 1 ;
- et c'est le seul élément non nul de sa colonne.

Exemple d'une matrice échelonnée (à gauche) et échelonnée réduite (à droite) ; les $*$ désignent des coefficients quelconques, les $+$ des coefficients non nuls :

$$\begin{pmatrix} + & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & + & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & + & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Théorème 2.
Étant donnée une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une unique matrice échelonnée réduite U obtenue à partir de A par des opérations élémentaires sur les lignes.

Ce théorème permet donc de se ramener par des opérations élémentaires à des matrices dont la structure est beaucoup plus simple : les matrices échelonnées réduites.

Démonstration. Nous admettons l'unicité.
L'existence se démontre grâce à l'algorithme de Gauss. L'idée générale consiste à utiliser des substitutions de lignes pour placer des zéros là où il faut de façon à créer d'abord une forme échelonnée, puis une forme échelonnée réduite.

Soit A une matrice $n \times p$ quelconque.

Partie A. Passage à une forme échelonnée.
Étape A.1. *Choix du pivot.*
On commence par inspecter la première colonne. Soit elle ne contient que des zéros, auquel cas on passe directement à l'étape A.3, soit elle contient au moins un terme non nul. On choisit alors un tel terme, que l'on appelle le ***pivot***. Si c'est le terme a_{11}, on passe directement à l'étape A.2 ; si c'est un terme a_{i1} avec $i \neq 1$, on échange les lignes 1 et i ($L_1 \leftrightarrow L_i$) et on passe à l'étape A.2.

Au terme de l'étape A.1, soit la matrice A a sa première colonne nulle (à gauche) ou bien on obtient une matrice équivalente dont le premier coefficient a'_{11} est non nul (à droite) :

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = A \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a'_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{ij} & \cdots & a'_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a'_{np} \end{pmatrix} \sim A.$$

Étape A.2. *Élimination.*
On ne touche plus à la ligne 1, et on se sert du pivot a'_{11} pour éliminer tous les termes a'_{i1} (avec $i \geqslant 2$) situés sous le pivot. Pour cela, il suffit de remplacer la ligne i par elle-même moins $\frac{a'_{i1}}{a'_{11}} \times$ la ligne 1, ceci pour $i = 2, \ldots, n$: $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a'_{21}}{a'_{11}} L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a'_{31}}{a'_{11}} L_1$,...
Au terme de l'étape A.2, on a obtenu une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ 0 & a''_{22} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a''_{i2} & \cdots & a''_{ij} & \cdots & a''_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a''_{n2} & \cdots & a''_{nj} & \cdots & a''_{np} \end{pmatrix} \sim A.$$

Étape A.3. *Boucle.*
Au début de l'étape A.3, on a obtenu dans tous les cas de figure une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a^1_{11} & a^1_{12} & \cdots & a^1_{1j} & \cdots & a^1_{1p} \\ 0 & a^1_{22} & \cdots & a^1_{2j} & \cdots & a^1_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a^1_{i2} & \cdots & a^1_{ij} & \cdots & a^1_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a^1_{n2} & \cdots & a^1_{nj} & \cdots & a^1_{np} \end{pmatrix} \sim A$$

dont la première colonne est bien celle d'une matrice échelonnée. On va donc conserver cette première colonne. Si $a^1_{11} \neq 0$, on conserve aussi la première ligne, et l'on repart avec l'étape A.1 en l'appliquant cette fois à la sous-matrice $(n-1) \times (p-1)$ (ci-dessous à gauche : on « oublie » la première ligne et la première colonne de A) ; si $a^1_{11} = 0$, on repart avec l'étape A.1 en l'appliquant à la sous-matrice $n \times (p-1)$ (à droite, on « oublie » la première colonne) :

$$\begin{pmatrix} a^1_{22} & \cdots & a^1_{2j} & \cdots & a^1_{2p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^1_{i2} & \cdots & a^1_{ij} & \cdots & a^1_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^1_{n2} & \cdots & a^1_{nj} & \cdots & a^1_{np} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a^1_{12} & \cdots & a^1_{1j} & \cdots & a^1_{1p} \\ a^1_{22} & \cdots & a^1_{2j} & \cdots & a^1_{2p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^1_{i2} & \cdots & a^1_{ij} & \cdots & a^1_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^1_{n2} & \cdots & a^1_{nj} & \cdots & a^1_{np} \end{pmatrix}$$

Au terme de cette deuxième itération de la boucle, on aura obtenu une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a^1_{11} & a^1_{12} & \cdots & a^1_{1j} & \cdots & a^1_{1p} \\ 0 & a^2_{22} & \cdots & a^2_{2j} & \cdots & a^2_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a^2_{ij} & \cdots & a^2_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a^2_{nj} & \cdots & a^2_{np} \end{pmatrix} \sim A,$$

et ainsi de suite.

Comme chaque itération de la boucle travaille sur une matrice qui a une colonne de moins que la précédente, alors au bout d'au plus $p-1$ itérations de la boucle, on aura obtenu une matrice échelonnée.

Partie B. Passage à une forme échelonnée réduite.
Étape B.1. *Homothéties.*
On repère le premier élément non nul de chaque ligne non nulle, et on multiplie cette ligne par l'inverse de cet élément. Exemple : si le premier élément non nul de la ligne i est $\alpha \neq 0$, alors on effectue $L_i \leftarrow \frac{1}{\alpha} L_i$. Ceci crée une matrice échelonnée avec des 1 en position de pivots.

Étape B.2. *Élimination.*
On élimine les termes situés au-dessus des positions de pivot comme précédemment, en procédant à partir du bas à droite de la matrice. Ceci ne modifie pas la structure échelonnée de la matrice en raison de la disposition des zéros dont on part.

□

Exemple 15.
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A. Passage à une forme échelonnée.
Première itération de la boucle, étape A.1. Le choix du pivot est tout fait, on garde $a_{11}^1 = 1$.
Première itération de la boucle, étape A.2. On ne fait rien sur la ligne 2 qui contient déjà un zéro en bonne position et on remplace la ligne 3 par $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$. On obtient

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Deuxième itération de la boucle, étape A.1. Le choix du pivot est tout fait, on garde $a_{22}^2 = 2$.
Deuxième itération de la boucle, étape A.2. On remplace la ligne 3 avec l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$. On obtient

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est échelonnée.

B. Passage à une forme échelonnée réduite.
Étape B.1, homothéties. On multiplie la ligne 2 par $\frac{1}{2}$ et la ligne 3 par $-\frac{1}{2}$ et l'on obtient

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Étape B.2, première itération. On ne touche plus à la ligne 3 et on remplace la ligne 2 par $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3$. On obtient

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Étape B.2, deuxième itération. On ne touche plus à la ligne 2 et on remplace la ligne 1 par $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$. On obtient

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est bien échelonnée et réduite.

5.5. Matrices élémentaires et inverse d'une matrice

Théorème 3.
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si sa forme échelonnée réduite est la matrice identité I_n.

Démonstration. Notons U la forme échelonnée réduite de A. Et notons E le produit de matrices élémentaires tel que $EA = U$.

$\Longleftarrow$ Si $U = I_n$ alors $EA = I_n$. Ainsi par définition, A est inversible et $A^{-1} = E$.

$\Longrightarrow$ Nous allons montrer que si $U \neq I_n$, alors A n'est pas inversible.

- Supposons $U \neq I_n$. Alors la dernière ligne de U est nulle (sinon il y aurait un pivot sur chaque ligne donc ce serait I_n).
- Cela entraîne que U n'est pas inversible : en effet, pour tout matrice carrée V, la dernière ligne de UV est nulle ; on n'aura donc jamais $UV = I_n$.
- Alors, A n'est pas inversible non plus : en effet, si A était inversible, on aurait $U = EA$ et U serait inversible comme produit de matrices inversibles (E est inversible car c'est un produit de matrices élémentaires qui sont inversibles).

□

Remarque.
Justifions maintenant notre méthode pour calculer A^{-1}.
Nous partons de $(A|I)$ pour arriver par des opérations élémentaires sur les lignes à $(I|B)$. Montrons que $B = A^{-1}$. Faire une opération élémentaire signifie multiplier à gauche par une des matrices élémentaires. Notons E le produit de ces matrices élémentaires. Dire que l'on arrive à la fin du processus à I signifie $EA = I$. Donc $A^{-1} = E$. Comme on fait les mêmes opérations sur la partie droite du tableau, alors on obtient $EI = B$. Donc $B = E$. Conséquence : $B = A^{-1}$.

Corollaire 1.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) La matrice A est inversible.
(ii) Le système linéaire $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ a une unique solution $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
(iii) Pour tout second membre B, le système linéaire $AX = B$ a une unique solution X.

Démonstration. Nous avons déjà vu $(i) \implies (ii)$ et $(i) \implies (iii)$.
Nous allons seulement montrer $(ii) \implies (i)$. Nous raisonnons par contraposée : nous allons montrer la proposition équivalente $\text{non}(i) \implies \text{non}(ii)$. Si A n'est pas inversible, alors sa forme échelonnée réduite U contient un premier zéro sur sa diagonale, disons à la place ℓ. Alors U à la forme suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & c_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & & \cdots & * \\ 0 & 0 & 1 & c_{\ell-1} & & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}. \qquad \text{On note} \qquad X = \begin{pmatrix} -c_1 \\ \vdots \\ -c_{\ell-1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors X n'est pas le vecteur nul, mais UX est le vecteur nul. Comme $A = E^{-1}U$, alors AX est le vecteur nul. Nous avons donc trouvé un vecteur non nul X tel que $AX = 0$. □

Mini-exercices.

1. Exprimer les systèmes linéaires suivants sous forme matricielle et les résoudre en inversant la matrice : $\begin{cases} 2x + 4y = 7 \\ -2x + 3y = -14 \end{cases}$, $\begin{cases} x + z = 1 \\ -2y + 3z = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x + t = \alpha \\ x - 2y = \beta \\ x + y + t = 2 \\ y + t = 4 \end{cases}$.
2. Écrire les matrices 4×4 correspondant aux opérations élémentaires : $L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2$, $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{4}L_2$, $L_1 \leftrightarrow L_4$. Sans

calculs, écrire leurs inverses. Écrire la matrice 4×4 de l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 + 3L_4$.

3. Écrire les matrices suivantes sous forme échelonnée, puis échelonnée réduite : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

6. Matrices triangulaires, transposition, trace, matrices symétriques

6.1. Matrices triangulaires, matrices diagonales

Soit A une matrice de taille $n \times n$. On dit que A est ***triangulaire inférieure*** si ses éléments au-dessus de la diagonale sont nuls, autrement dit :

$$i < j \implies a_{ij} = 0.$$

Une matrice triangulaire inférieure a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On dit que A est ***triangulaire supérieure*** si ses éléments en-dessous de la diagonale sont nuls, autrement dit :

$$i > j \implies a_{ij} = 0.$$

Une matrice triangulaire supérieure a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple 16.
Deux matrices triangulaires inférieures (à gauche), une matrice triangulaire supérieure (à droite) :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Une matrice qui est triangulaire inférieure ***et*** triangulaire supérieure est dite ***diagonale***. Autrement dit : $i \neq j \implies a_{ij} = 0$.

Exemple 17.
Exemples de matrices diagonales :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemple 18 (Puissances d'une matrice diagonale)**.**
Si D est une matrice diagonale, il est très facile de calculer ses puissances D^p (par récurrence sur p) :

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \implies D^p = \begin{pmatrix} \alpha_1^p & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2^p & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n-1}^p & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_n^p \end{pmatrix}$$

Théorème 4.
Une matrice A de taille $n \times n$, triangulaire, est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls.

Démonstration. Supposons que A soit triangulaire supérieure.

- Si les éléments de la diagonale sont tous non nuls, alors la matrice A est déjà sous la forme échelonnée. En multipliant chaque ligne i par l'inverse de l'élément diagonal a_{ii}, on obtient des 1 sur la diagonale. De ce fait, la forme échelonnée réduite de A sera la matrice identité. Le théorème 3 permet de conclure que A est inversible.
- Inversement, supposons qu'au moins l'un des éléments diagonaux soit nul et notons $a_{\ell\ell}$ le premier élément nul de la diagonale. En multipliant les lignes 1 à $\ell - 1$ par l'inverse de leur élément diagonal, on obtient une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & & & \cdots & * \\ 0 & \ddots & * & \cdots & & \cdots & * \\ 0 & 0 & 1 & * & & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & {\color{red}0} & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}.$$
Il est alors clair que la colonne numéro ℓ de la forme échelonnée réduite ne contiendra pas de 1 comme pivot. La forme échelonnée réduite de A ne peut donc pas être I_n et par le théorème 3, A n'est pas inversible.

Dans le cas d'une matrice triangulaire inférieure, on utilise la transposition (qui fait l'objet de la section suivante) et on obtient une matrice triangulaire supérieure. On applique alors la démonstration ci-dessus. □

6.2. La transposition

Soit A la matrice de taille $n \times p$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Définition 10.
On appelle ***matrice transposée*** de A la matrice A^T de taille $p \times n$ définie par :
$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit : le coefficient à la place (i, j) de A^T est a_{ji}. Ou encore la i-ème ligne de A devient la i-ème colonne de A^T (et réciproquement la j-ème colonne de A^T est la j-ème ligne de A).

Notation : La transposée de la matrice A se note aussi souvent ${}^tA$.

Exemple 19.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \qquad (1 \quad -2 \quad 5)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

L'opération de transposition obéit aux règles suivantes :

Théorème 5.
1. $(A + B)^T = A^T + B^T$

2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
3. $(A^T)^T = A$
4. $\boxed{(AB)^T = B^T A^T}$
5. *Si A est inversible, alors A^T l'est aussi et on a $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*

Notez bien l'inversion : $(AB)^T = B^T A^T$, comme pour $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

6.3. La trace

Dans le cas d'une matrice carrée de taille $n \times n$, les éléments $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ sont appelés les ***éléments diagonaux***. Sa ***diagonale principale*** est la diagonale $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition 11.
La ***trace*** de la matrice A est le nombre obtenu en additionnant les éléments diagonaux de A. Autrement dit,

$$\boxed{\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.}$$

Exemple 20.
- Si $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{smallmatrix}\right)$, alors $\operatorname{tr} A = 2 + 5 = 7$.
- Pour $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 11 & 0 & -10 \end{smallmatrix}\right)$, $\operatorname{tr} B = 1 + 2 - 10 = -7$.

Théorème 6.
Soient A et B deux matrices $n \times n$. Alors :

1. $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$,
2. $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr} A$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{K}$,
3. $\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr} A$,
4. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Démonstration.

1. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, le coefficient (i, i) de $A + B$ est $a_{ii} + b_{ii}$. Ainsi, on a bien $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$.
2. On a $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha a_{11} + \cdots + \alpha a_{nn} = \alpha(a_{11} + \cdots + a_{nn}) = \alpha \operatorname{tr} A$.
3. Étant donné que la transposition ne change pas les éléments diagonaux, la trace de A est égale à la trace de A^T.
4. Notons c_{ij} les coefficients de AB. Alors par définition

$$c_{ii} = a_{i1}b_{1i} + a_{i2}b_{2i} + \cdots + a_{in}b_{ni}.$$

Ainsi,

$$\begin{array}{rcllll} \operatorname{tr}(AB) & = & a_{11}b_{11} & +a_{12}b_{21} & +\cdots & +a_{1n}b_{n1} \\ & & +a_{21}b_{12} & +a_{22}b_{22} & +\cdots & +a_{2n}b_{n2} \\ & & \vdots & & & \\ & & +a_{n1}b_{1n} & +a_{n2}b_{2n} & +\cdots & +a_{nn}b_{nn}. \end{array}$$

On peut réarranger les termes pour obtenir

$$\begin{array}{rcllll} \operatorname{tr}(AB) & = & a_{11}b_{11} & +a_{21}b_{12} & +\cdots & +a_{n1}b_{1n} \\ & & +a_{12}b_{21} & +a_{22}b_{22} & +\cdots & +a_{n2}b_{2n} \\ & & \vdots & & & \\ & & +a_{1n}b_{n1} & +a_{2n}b_{n2} & +\cdots & +a_{nn}b_{nn}. \end{array}$$

En utilisant la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{K}$, la première ligne devient

$$b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1n}a_{n1}$$

qui vaut le coefficient $(1,1)$ de BA. On note d_{ij} les coefficients de BA. En faisant de même avec les autres lignes, on voit finalement que

$$\operatorname{tr}(AB) = d_{11} + \cdots + d_{nn} = \operatorname{tr}(BA).$$

□

6.4. Matrices symétriques

Définition 12.
Une matrice A de taille $n \times n$ est ***symétrique*** si elle est égale à sa transposée, c'est-à-dire si

$$A = A^T,$$

ou encore si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \ldots, n$. Les coefficients sont donc symétriques par rapport à la diagonale.

Exemple 21.
Les matrices suivantes sont symétriques :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 22.
Pour une matrice B quelconque, les matrices $B \cdot B^T$ et $B^T \cdot B$ sont symétriques.
Preuve : $(BB^T)^T = (B^T)^T B^T = BB^T$. Idem pour $B^T B$.

6.5. Matrices antisymétriques

Définition 13.
Une matrice A de taille $n \times n$ est ***antisymétrique*** si

$$A^T = -A,$$

c'est-à-dire si $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \ldots, n$.

Exemple 23.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont toujours tous nuls.

Exemple 24.
Toute matrice est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Preuve : Soit A une matrice. Définissons $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$ et $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$. Alors d'une part $A = B + C$; d'autre part B est symétrique, car $B^T = \frac{1}{2}(A^T + (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T + A) = B$; et enfin C est antisymétrique, car $C^T = \frac{1}{2}(A^T - (A^T)^T) = -C$.
Exemple :

$$\text{Pour} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{alors} \qquad A \; = \; \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}}_{\text{symétrique}} \; + \; \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{antisymétrique}}.$$

Mini-exercices.

1. Montrer que la somme de deux matrices triangulaires supérieures reste triangulaire supérieure. Montrer que c'est aussi valable pour le produit.
2. Montrer que si A est triangulaire supérieure, alors A^T est triangulaire inférieure. Et si A est diagonale ?

3. Soit $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Calculer $A^T \cdot A$, puis $A \cdot A^T$.
4. Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Calculer $\operatorname{tr}(A \cdot A^T)$.
5. Soit A une matrice de taille 2×2 inversible. Montrer que si A est symétrique, alors A^{-1} aussi. Et si A est antisymétrique ?
6. Montrer que la décomposition d'une matrice sous la forme « symétrique + antisymétrique » est unique.