

Electronique Numérique

Chapitre 1 : Numération et arithmétique binaire

Pr . YOUSSEF MOUZOUNA

Chapitre1: Représentation et codage de l'information

I. Introduction

La numération universellement adoptée est celle du système décimal, dans cette base familière, on utilise les 10 symboles, appelés chiffres, de l'ensemble : $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, donc un nombre quelconque peut s'écrire en utilisant les puissances de 10

Exemple: $693 = 6 * 10^2 + 9 * 10^1 + 3 * 10^0$

Mais la représentation des nombres avec le système décimal (base 10) n'est pas la seule utilisée. On peut donc en utiliser d'autres, en particulier le système binaire (base 2): $\{0,1\}$

et le système Hexadécimale (base16): $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F\}$

Les circuits logiques ne connaissent que les valeurs 0 et 1 ; alors on peut faire des calculs et des traitements comme on le fait avec le système décimal. Ceci permet de rendre le traitement de l'information automatique et rapide.

Chapitre1: Représentation et codage de l'information

II. Représentation décimale, binaire, hexadécimale:

1. Système décimale

C'est le système de numération que nous utilisons chaque jour, ce système de **base10** qui utilise 10symbole différents: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Un nombre N (entier positif) exprimé dans le système de numération décimale est défini par la relation:

$$N = a_n * 10^n + a_{n-1} * 10^{n-1} + + a_1 * 10^1 + a_0 * 10^0$$

Où a_n est un chiffre de range n:

Exemple: $(1572)_{10} = 1 * 10^3 + 5 * 10^2 + 7 * 10^1 + 2 * 10^0$

Chapitre1: Représentation et codage de l'information

II. Représentation décimale, binaire, hexadécimale:

2. Système hexadécimale

Le système hexadécimale utilise 16 symboles différents:

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F.

La succession des nombres hexadécimaux par ordre croissant:

□ 1 chiffre: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F,0,1,2,3.....

□ 2 chiffres: 00,01,02,03,04,05,06,07,08,09,0A,0B,0C,0D,0E,0F,10,11,.....1A,1B...

Un chiffre hexadécimal peut être précédé d'un \$ ou suivi d'un (16) ou d'un h

Exemple: \$F6B1 ; (F2B1)₁₆ ; (F6B1)_h

Dans ce système le poids est une puissance de 16:

$$N = a_n * 16^n + a_{n-1} * 16^{n-1} + + a_1 * 16^1 + a_0 * 16^0$$

Exemple: $N = (AC\ 35)_{16} = A * 16^3 + C * 16^2 + 3 * 16^1 + 5 * 16^0$

Chapitre1: Représentation et codage de l'information

II. Représentation décimale, binaire, hexadécimale:

3. Système binaire

Le système binaire est le système de **base 2**, il utilise 2 symboles différents: {0,1}, chacun de ces 2 chiffres est appelé **bit**.

Dans ce système le poids est une puissance de 2

$$N = a_n * 2^n + a_{n-1} * 2^{n-1} + \dots + a_1 * 2^1 + a_0 * 2^0$$

Exemple $N = (10110)_2 = 1 * 2^4 + 0 * 2^3 + 1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 0 * 2^0$

Pour identifier l'écriture en binaire d'un nombre, celui-ci peut être précédé d'un signe % ou suivie soit de l'indice de base soit de la lettre b.

Exemple: %11010 ou (11010)₂ ou (11010)_b

Chapitre1: Représentation et codage de l'information

II. Représentation décimale, binaire, hexadécimale:

3. Système binaire

Etendue des valeurs

En utilisant n bits on peut former 2^n nombre différent et le plus grand nombre d'entre eux est égale $(2^n - 1)$.

Par exemple si $n=8$, $N_{\max}=(2^8-1)=255$, donc on peut former 256 nombre de $(0000\ 0000)_b$ à $(1111\ 1111)_b$

Définition

Quartet: nombre binaire former de 4 bits

Octet (byte); nombre binaire former de 8 bits

Mot (word): nombre binaire former de 16 bits

LSB: bit le moins significatif ou bit du poids le plus faible

MSB: bit le plus significatif ou bit du poids le plus fort

Chapitre1: Représentation et codage de l'information

III. Conversion entre système de numération

1. Décimal $\longleftrightarrow$ Binaire

□ conversion de la base 2 vers la base 10 (du binaire au décimal)

On exploite directement la forme polynomiale:

$$N = a_n * 2^n + a_{n-1} * 2^{n-1} + + a_1 * 2^1 + a_0 * 2^0$$

Exemple:

$$N = (10110)_2 = 1 * 2^4 + 0 * 2^3 + 1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 0 * 2^0$$

$$N = (10110)_2 = (22)_{10}$$

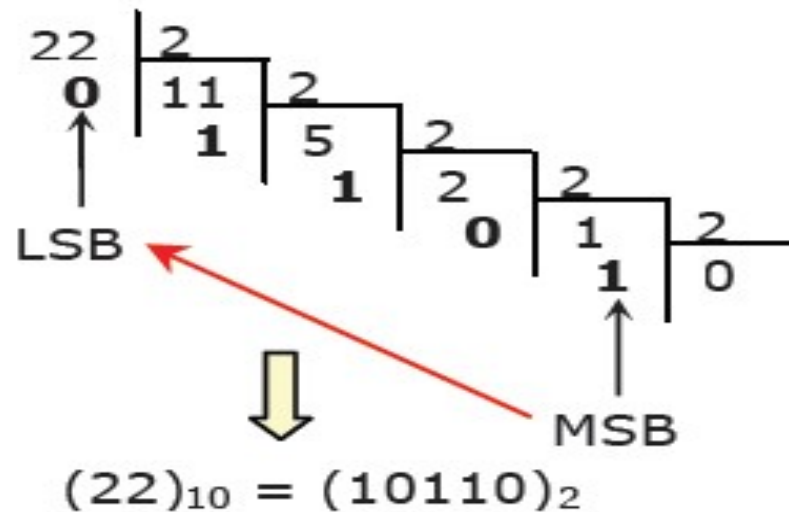
Chapitre1: Représentation et codage de l'information

III. Conversion entre système de numération

1. Décimal $\longleftrightarrow$ Binaire

- ❑ conversion de la base 10 vers la base 2 (du décimal au binaire)

La méthode de division est la plus utilisée ; elle consiste en des divisions successives du nombre $(N)_{10}$ par 2, jusqu'à obtenir un quotient nul. Les restes des divisions successives, écrits dans l'ordre inverse, constituent le nombre N dans la base 2 $(N)_2$.



Chapitre1: Représentation et codage de l'information

III. Conversion entre système de numération

2. Décimal $\longleftrightarrow$ Hexadécimal

□ conversion de la base 16 vers la base 10 (du héra au décimal)

On exploite directement la forme polynomiale:

$$N = a_n * 16^n + a_{n-1} * 16^{n-1} + + a_1 * 16^1 + a_0 * 16^0$$

Exemple:

$$N = (AC\ 35)_{16} = 10 * 16^3 + 12 * 16^2 + 3 * 16^1 + 5 * 16^0 = (44085)_{10}$$

□ Conversion de la base 10 vers la base 16:

La méthode de division est la plus utilisée ; elle consiste en des divisions successives du nombre $(N)_{10}$ par 16, jusqu'à obtenir un quotient nul. Les restes des divisions successives, écrits dans l'ordre inverse, constituent le nombre N dans la base 16 $(N)_{16}$.

Chapitre1: Représentation et codage de l'information

III. Conversion entre système de numération

2. Binaire $\longleftrightarrow$ Hexadécimal

- ❑ conversion de la base 16 vers la base 2 (du hexa au binaire)

Chaque symbole du nombre hexadécimal est remplacé par son équivalent écrit dans le système binaire.

Exemple $N = (BF8)_{16}$

$N = \% 1011\ 1111\ 1000$

- ❑ conversion de la base 2 vers la base 16 (du binaire au hexa)

C'est l'inverse de la précédente, il faut regarder les 0 et 1 du nombre par quartet en commençant de la droite, puis remplacer chaque quartet par son équivalent Hexadécimale

Exemple: $N = \% 100001101111$

$N = \% 1000\ 0110\ 1111$

$N = (8\ 6\ F)_{16}$

Chapitre1: Représentation et codage de l'information

IV. Codes: Binaire pur, GRAY, BCD,ASCII

1. Binaire pur

C'est le code binaire sans aucune codification, c'est-à-dire qui découle directement du principe général de la numération. Il est aussi appelé code binaire naturel.

Valeur décimale	Code binaire			
	A ₃	A ₂	A ₁	A ₀
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1

Chapitre1: Représentation et codage de l'information

IV. Codes: Binaire pur, GRAY, BCD,ASCII

2. La propriété réside dans le fait qu'un seul bit change d'état entre nombre consécutif.

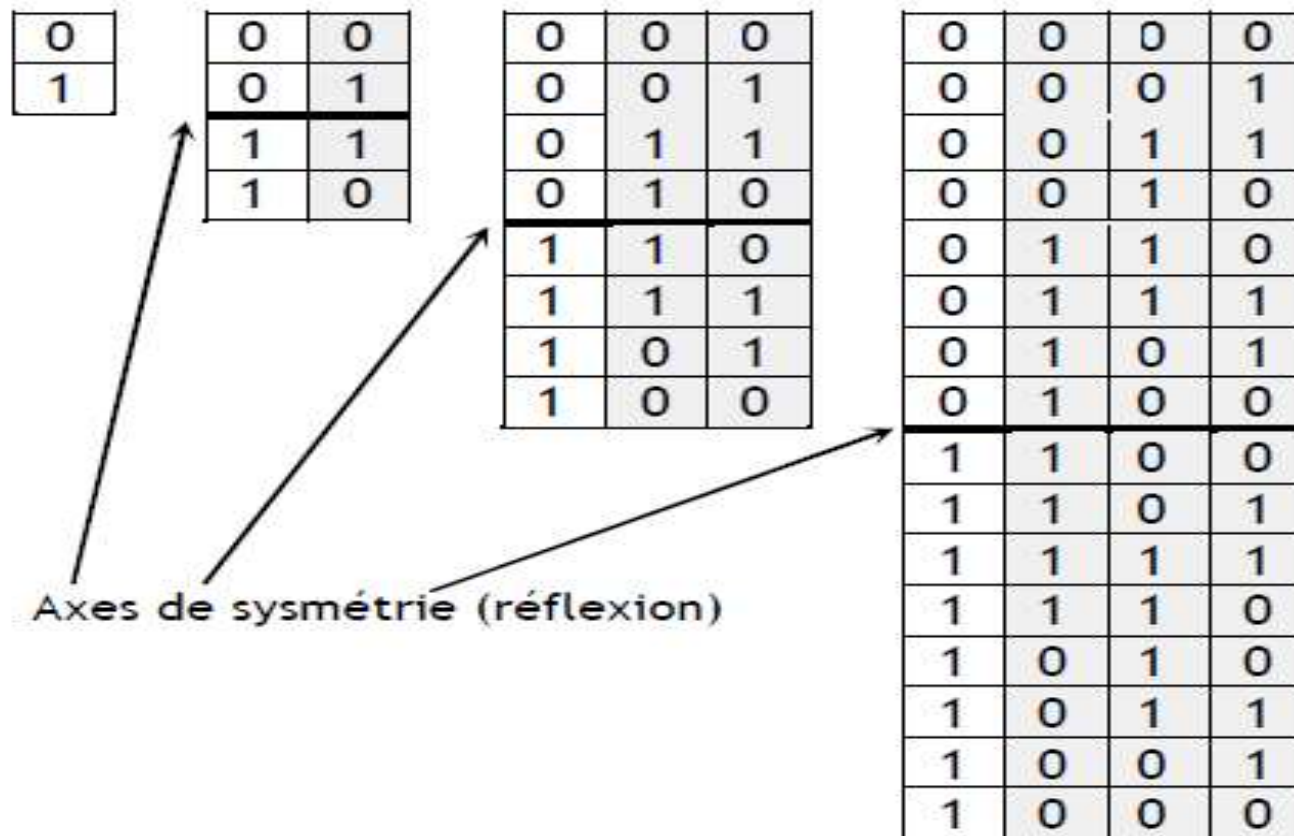
Valeur décimale	Code binaire				Code GRAY			
	A ₃	A ₂	A ₁	A ₀	G ₃	G ₂	G ₁	G ₀
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1
2	0	0	1	0	0	0	1	1
3	0	0	1	1	0	0	1	0
4	0	1	0	0	0	1	1	0
5	0	1	0	1	0	1	1	1
6	0	1	1	0	0	1	0	1
7	0	1	1	1	0	1	0	0
8	1	0	0	0	1	1	0	0
9	1	0	0	1	1	1	0	1
10	1	0	1	0	1	1	1	1
11	1	0	1	1	1	1	1	0
12	1	1	0	0	1	0	1	0
13	1	1	0	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1	0	0	1
15	1	1	1	1	1	0	0	0

Chapitre1: Représentation et codage de l'information

IV. Codes: Binaire pur, GRAY, BCD, ASCII

3. Code GRAY (Code binaire réfléchi)

Le terme réfléchi est du la symétrie qui apparait dans le code

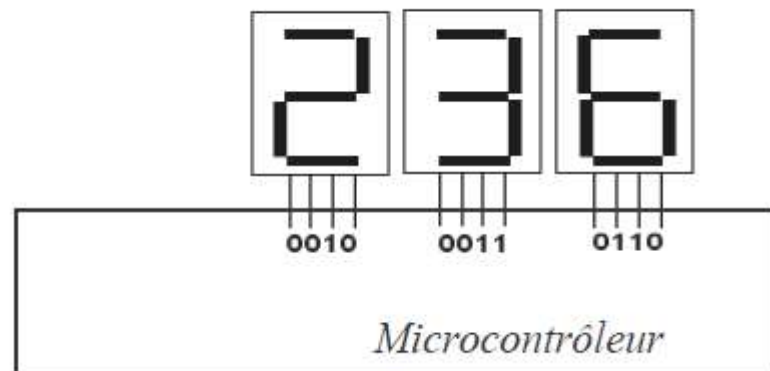


Chapitre1: Représentation et codage de l'information

IV. Codes: Binaire pur, GRAY, BCD,ASCII

4. Code BCD

Le code binaire codé en décimale, ce codage est destiné à l'affichage des valeurs décimale, chaque nombre doit être codé en binaire sur 4 bits, il ne permet aucun calcul il est seulement destiné la saisie et l'affichage des données.



Valeur décimale	Code BCD			
	A ₃	A ₂	A ₁	A ₀
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1

Chapitre1: Représentation et codage de l'information

IV. Codes: Binaire pur, GRAY, BCD,ASCII

5. Code ASCII

(American Standard Code for Information Interchange) est un code

qui représente les caractères éditables ou non éditables : éditables parce que l'on peut les éditer comme la caractère "A" et non éditables comme le caractère "Escape«

ou "Return". Il est codé sur 7 bits (b6 b5 b4 b3 b2 b1 b0), ce qui permet de représenter 128 caractères différents. La table suivante montre un tel codage. Par exemple, Le code de la lettre "A"(majuscule) est :1000001

.

Chapitre1: Représentation et codage de l'information

Binaire				Hexadécimal		b6 0 0 0 0 1 1 1 1							
						b5 0 0 1 1 0 0 1 1							
						b4 0 1 0 1 0 1 0 1							
						0 1 2 3 4 5 6 7							
b3	b2	b1	b0	Décimal		0	16	32	48	64	80	96	112
0	0	0	0	0	+0	NUL	TC7 (DEL)	SP	0	@	P	.	p
0	0	0	1	1	+1	TC1 (SOH)	DC1	!	1	A	Q	a	q
0	0	1	0	2	+2	TC2 (STX)	DC2	"	2	B	R	b	r
0	0	1	1	3	+3	TC3 (ETX)	DC3	#	3	C	S	c	s
0	1	0	0	4	+4	TC4 (EOT)	DC4	\$	4	D	T	d	t
0	1	0	1	5	+5	TC5 (ENO)	TC8 (NAK)	%	5	E	U	e	u
0	1	1	0	6	+6	TC6 (ACK)	TC9 (SYN)	&	6	F	V	f	v
0	1	1	1	7	+7	BEL	TC10 (ETB)	'	7	G	W	g	w
1	0	0	0	8	+8	FE0 (BS)	CAN	(	8	H	X	h	x
1	0	0	1	9	+9	FE1 (HT)	EM	)	9	I	Y	i	y
1	0	1	0	A	+10	FE2 (LF)	SUB	*	:	J	Z	j	z
1	0	1	1	B	+11	FE3 (VT)	ESC	+	;	K	[	k	é
1	1	0	0	C	+12	FE4 (FF)	IS4 (FS)	,	<	L	\	l	ù
1	1	0	1	D	+13	FE5 (CR)	IS3 (GS)	-	=	M	]	m	è
1	1	1	0	E	+14	SO	IS2 (RS)	.	>	N	^	n	-
1	1	1	1	F	+15	SI	IS1 (US)	/	?	O	_	o	DEL

Chapitre1: Représentation et codage de l'information

V. Arithmétique binaire

1. Addition

. Les opérations arithmétiques se font de la même façon en binaire qu'en base décimale. C'est-à-dire que lorsque l'on dépasse la valeur maxi au niveau du bit n (lorsque l'on dépasse la valeur 1) on a une retenue ou un report au bit $n+1$.

Ainsi:

	La retenue
$0+0=0$	0
$0+1=1$	0
$1+0=1$	0
$1+1=0$	1

Voyons cela sur 4 bits:

Diagram illustrating binary addition with carry propagation (retenues) for 4 bits:

0 0 0 1	← retenues	1 1 1 0	1
0 0 0 1		0 1 1 1	7
+ 0 1 0 1		+ 1 1 1 0	+ 14
0 0 1 1 0		1 0 1 0 1	21

Chapitre1: Représentation et codage de l'information

V. Arithmétique binaire

2. Soustraction

Même principe que précédemment en admettant les bases suivantes :

	La retenue
0-0=0	0
1-0=1	0
0-1=1	1
1-1=0	0

Sur 4 bits:

$$\begin{array}{r}
 0111 \\
 1110 \\
 - 0111 \\
 \hline
 0011
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 1 \\
 14 \\
 - 7 \\
 \hline
 07
 \end{array}$$

Effectuer 20-14

Chapitre1: Représentation et codage de l'information

V. Arithmétique binaire

3. Les nombres négatif

a. Représentation avec la valeur absolue et le signe

On adopte la convention 0(+) , 1(-) pour le signe:

+35=0 100011 -35=1 100011

b. Complément à 1

Le complément à un d'un nombre binaire se forme en inversant chacun des bits.

Exemple : si $A = 10101$ alors $A_1 = 01010$.

c. Complément à 2

Soit A un nombre binaire : Le complément à deux de A est:

Intérêt : On peut remplacer les soustractions par les additions